УДК 517.946

В. И. КОРЗЮК, Е. С. ЧЕБ

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для нестрого гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $\Im u \equiv \left(\partial_t - a\partial_x + b^{(1)}\right) \times \left(\partial_t - a\partial_x + b^{(2)}\right) u(t,x) = f(t,x)$, где $a > 0,\ b^{(1)}, b^{(2)} \geq 0,\ \Omega = (0,l),\ b^{(1)} \neq b^{(2)},\ t > 0,\ x \in \Omega$, в цилиндрической области $Q = (0,\infty) \times \Omega \subset \Re^2$ рассматривается корректно поставленная, по Адамару, граничная задача с условиями Неймана на боковой поверхности. Особенностью данной задачи является то, что граничные условия поставлены не на всей границе области, в которой задано уравнение, а лишь на ее части. Эта часть границы зависит от соотношения *t* и *l/a*. В работе строится классическое решение вышеуказанной задачи методом характеристик. Согласно этому методу в общем решении исходного уравнения содержится сумма двух функций, зависящих от аргумента *x+at*, которые на области определения находятся из начальных и граничных условий. Выводятся условия согласования начальных и граничных условий с учетом гладкости заданных функций, вытекающие из требования дважды непрерывной дифференцируемости решения. Отмечено, что в случае строго гиперболического уравнения требования на гладкость начальных данных на порядок ниже. Полученные результаты могут быть использованы для корректной постановки граничных задач для гиперболических уравнений.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа; граничная задача; условия Неймана; классическое решение; метод характеристик; условия согласования.

A well-posed problem in the sense of Hadamard for nonstrongly hyperbolic equation of the second order with constant coefficients of the kind $\Im u \equiv \left(\partial_t - a\partial_x + b^{(1)}\right)\left(\partial_t - a\partial_x + b^{(2)}\right) u(t,x) = f(t,x)$, where $a > 0,\ b^{(1)}, b^{(2)} \geq 0,\ \Omega = (0,l),\ b^{(1)} \neq b^{(2)},\ t > 0,\ x \in \Omega$, in cylindrical domain $Q = (0,\infty) \times \Omega \subset \Re^2$ with Neumann boundary conditions on the lateral surface is considered. The specific feature of this problem is that the boundary conditions are given not on the whole boundary of the domain in which an equation is posed, but only on its part. This part of the boundary depends on the relation between *t* and *l/a*. In this paper the classical solution to the problem under study is constructed using the method of characteristics. According to this method, general solution of the equation contains the sum of two functions, which depend on the argument *x+at* and are found from initial and boundary conditions. Matching conditions for initial and boundary conditions are derived from the requirement of twice continuously differentiable solution taking into account smoothness of the functions. It is noticed that in the case of strictly hyperbolic equations, the requirements on the smoothness of the initial data are of one order lower. The obtained results can be used for well-posed formulation of boundary value problems for hyperbolic equations.

Key words: hyperbolic equation; boundary problem; Neumann condition; classical solution; method of characteristics; fitting condition.

Известно, что в большинстве случаев классические решения являются основой теории численных методов решения задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Классическим решениям для гиперболических уравнений на данный момент посвящены многие статьи, в том числе [1–5], соответствующие данной работе. В конце статьи обсуждаются результаты, полученные для строго и нестрого гиперболических уравнений, для которых построены решения.

Таким образом, данная статья продолжает цикл работ по классическим решениям граничных задач для гиперболических уравнений методом характеристик.

В [1] для гиперболического уравнения второго порядка

$$\Im u \equiv \left(\partial_t - a^{(1)}\partial_x + b^{(1)}\right)\left(\partial_t - a^{(2)}\partial_x + b^{(2)}\right) u(t,x) = f(t,x)$$

в цилиндрической области решена граничная задача второго рода.

В настоящей статье исследуется приведенное выше уравнение при условии, что $a^{(1)} = a^{(2)} = a$. В этом случае уравнение становится нестрого гиперболическим, поскольку имеет кратные характеристики. Для такого уравнения решается вторая граничная задача методом характеристик. Граничные условия, как и в [2], задаются не на всей границе, а лишь на ее части.

1. Постановка задачи. Рассмотрим относительно функции $u(t,x)$ в полуполосе $Q = (0,\infty) \times \Omega \subset \Re^2$ переменных (t,x) линейное гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\Im u \equiv \left(\partial_t - a\partial_x + b^{(1)}\right)\left(\partial_t - a\partial_x + b^{(2)}\right) u(t,x) = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $a > 0,\ b^{(1)}, b^{(2)} \geq 0,\ \Omega = (0,l),\ b^{(1)} \neq b^{(2)}$.

К уравнению (1.1) присоединим условия начальные

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \partial_t u\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

и граничные

$$\begin{gathered} \partial_x u\big|_{x=0} = \mu^{(1)}(t),\ t > \frac{l}{a}, \\ \partial_x u\big|_{x=l} = \mu^{(2)}(t),\ t > 0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Условия (1.3) выбираются таким образом, чтобы задача (1.1) – (1.3) была корректно поставлена. Для единственности классического решения задачи (1.1) – (1.3) в полуполосе $\overline{Q} = [0,\infty) \times [0,l] \subset \Re^2$ наложим условия согласования на заданные функции этой задачи вида

$$\varphi'(l) = \mu^{(2)}(0); \tag{1.4}$$

$$\psi'(l) = \mu^{(2)'}(l); \tag{1.5}$$

$$\frac{b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right) - b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)}{a}\int_0^{l/a} f\big((\tau, l - a\tau) - f(\tau, l)\big)d\tau - \beta\int_0^{l/a}\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, l - a\tau)d\tau =$$
$$= -\left(b^{(1)} - b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)} + b^{(2)}}{a}\right)\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right) + \left(b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right) - b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right)\right)\varphi'(l) -$$
$$-\beta\psi'(l) + a\beta\varphi''(l); \tag{1.6}$$

$$\left(b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right) - b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)\right)\int_0^{l/a}\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, l - a\tau)d\tau - a\beta\int_0^{l/a}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tau, l - a\tau)d\tau - \beta\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{l}{a}, l\right) =$$
$$= -\left(b^{(1)} - b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)} + b^{(2)}}{a}\right)\mu^{(1)'}\left(\frac{l}{a}\right) + b^{(1)}b^{(2)}\beta\varphi'(l) - a\left(b^{(1)} + b^{(2)}\right)\beta\varphi''(l) +$$
$$+ a^2\beta\varphi^{(3)}(l) + \left(b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right) - b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)\right)\psi'(l) - a\beta\psi''(l), \tag{1.7}$$

где $\beta = \exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right) - \exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)$.

2. Однородное уравнение. Найдем решение задачи (1.1) – (1.3) методом характеристик в предположении, что уравнение (1.1) является однородным, т. е. найдем классическое решение уравнения

$$\Im u = 0, \ (t, x) \in \overline{Q}. \tag{2.1}$$

Решение уравнения (2.1) из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы [6]

$$u(t, x) = \exp\left(-b^{(1)}t\right)g_1(x + at) + \exp\left(-b^{(2)}t\right)g_2(x + at), \tag{2.2}$$

где g_1, g_2 – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции аргумента $x + at$.

Определим эти функции таким образом, чтобы выполнялись начальные (1.2) и граничные (1.3) условия. Если $(t, x) \in \overline{Q}$, то $x + at \in [0,\infty)$, поэтому $g_j : [0,\infty) \ni y \to g_j(y) \in \Re \ (j = 1,2)$.

Подставляя начальные условия (1.2) в представление решения (2.2), получим систему вида

$$u|_{t=0} = g_2(x) = \varphi(x), x \in [0,l],$$
$$\partial_t u|_{t=0} = g_1(x) + ag_2'(x) = \psi(x), x \in [0,l].$$

Из решения данной системы можем определить общий вид функций $g_1(y), g_2(y)$, когда их аргумент $y \in [0,l]$. Обозначим эти значения через $g_1^{(0)}, g_2^{(0)}$.

$$\begin{aligned} g_1^{(0)}(y) &= \frac{1}{b^{(1)} - b^{(2)}}\left(a\varphi'(y) - b^{(2)}\varphi(y) - \psi(y)\right), \quad y \in [0,l]; \\ g_2^{(0)}(y) &= \frac{1}{b^{(1)} - b^{(2)}}\left(-a\varphi'(y) + b^{(1)}\varphi(y) + \psi(y)\right), \quad y \in [0,l]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, решение задачи Коши (2.1), (1.2) с использованием формул (2.3) имеет вид

$$u(t,x)=\frac{\exp\left(-\left(b^{(1)}+b^{(2)}\right)a^{-1}t\right)}{b^{(1)}-b^{(2)}}\left[\left(b^{(1)}\exp\left(b^{(1)}t\right)-b^{(2)}\exp\left(b^{(2)}t\right)\right)\varphi(x+at)+\right.$$
$$\left.+\left(\exp\left(b^{(1)}t\right)-\exp\left(b^{(2)}t\right)\right)\left(\psi\left(x+at\right)-a\varphi'\left(x+at\right)\right)\right]. \qquad (2.4)$$

Перейдем к определению функций $g_1(y), g_2(y),$ когда их аргумент $y\in[l,\infty).$ Для этого воспользуемся граничными условиями (1.3). Из условия на левой границе имеем

$$\partial_x u\big|_{x=0}=\exp\left(-b^{(1)}t\right)g_1'\left(at\right)+\exp\left(-b^{(2)}t\right)g_2'\left(at\right)=\mu^{(1)}\left(t\right),\, t>\frac{l}{a}\cdot$$

Введем новую переменную $y=at,\, y\in[l,\infty),$ тогда уравнение примет вид

$$\exp\left(-\frac{b^{(1)}}{a}y\right)g_1'\left(y\right)+\exp\left(-\frac{b^{(2)}}{a}y\right)g_2'\left(y\right)=\mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right),\, y\in[l,\infty).$$

Аналогично рассматривается граничное условие (1.3) на правой границе $x=l.$ Имеем

$$\partial_x u\big|_{x=l}=\exp\left(-b^{(1)}t\right)g_1'\left(l+at\right)+\exp\left(-b^{(2)}t\right)g_2'\left(l+at\right)=\mu^{(2)}\left(t\right),\, t>0.$$

В переменных $y=l+at$ это уравнение примет вид

$$\exp\left(-\frac{b^{(1)}}{a}(y-l)\right)g_1'\left(y\right)+\exp\left(-\frac{b^{(1)}}{a}(y-l)\right)g_2'\left(y\right)=\mu^{(2)}\left(\frac{y-l}{a}\right),\ \ y\in[l,\infty).$$

Таким образом, для определения функций $g_1(y), g_2(y),$ когда их аргумент $y\in[l,\infty),$ решается система уравнений

$$\exp\left(-\frac{b^{(1)}}{a}y\right)g_1'\left(y\right)+\exp\left(-\frac{b^{(2)}}{a}y\right)g_2'\left(y\right)=\mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right),$$
$$\exp\left(-\frac{b^{(1)}}{a}(y-l)\right)g_1'\left(y\right)+\exp\left(-\frac{b^{(2)}}{a}(y-l)\right)g_2'\left(y\right)=\mu^{(2)}\left(\frac{y-l}{a}\right). \qquad (2.5)$$

Система (2.5) решается любым способом, например по правилу Крамара. Тогда

$$g_1'\left(y\right)=\frac{\exp\left(\frac{b^{(1)}}{a}y\right)}{D}\left(\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right)\mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right)-\mu^{(2)}\left(\frac{y-l}{a}\right)\right),\, y\in[l,\infty),$$
$$g_2'\left(y\right)=\frac{\exp\left(\frac{b^{(2)}}{a}y\right)}{D}\left(\mu^{(2)}\left(\frac{y-l}{a}\right)-\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)\mu^{(1)}\left(\frac{y}{a}\right)\right),\, y\in[l,\infty). \qquad (2.6)$$

Проинтегрируем систему (2.6), учитывая, что на стыке $y=l$ функции $g_1(y), g_2(y)$ должны быть непрерывны. Обозначим их значения $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}$ соответственно. Имеем

$$g_1^{(1)}\left(y\right)=\frac{1}{D}\int_l^y\exp\left(\frac{b^{(1)}}{a}s\right)\left(\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right)\mu^{(1)}\left(\frac{s}{a}\right)-\mu^{(2)}\left(\frac{s-l}{a}\right)\right)ds+g_1^{(0)}\left(l\right),$$
$$g_2^{(1)}\left(y\right)=\frac{1}{D}\int_l^y\exp\left(\frac{b^{(2)}}{a}s\right)\left(\mu^{(2)}\left(\frac{s-l}{a}\right)-\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)\mu^{(1)}\left(\frac{s}{a}\right)\right)ds+g_2^{(0)}\left(l\right),\ \ y\in[l,\infty). \qquad (2.7)$$

Таким образом, в формуле (2.2) определены неизвестные функции $g_j(y), j=1,2,$ следующим путем:

$$g_1(y)=\begin{cases} g_1^{(0)}(y), & y\in[0,l],\\ g_1^{(1)}(y), & y\in[l,\infty\}, \end{cases}\quad g_2(y)=\begin{cases} g_2^{(0)}(y), & y\in[0,l],\\ g_2^{(1)}(y), & y\in[l,\infty\}. \end{cases} \tag{2.8}$$

С учетом формулы (2.7) можно записать решение граничной задачи (1.2), (1.3), (2.1)

$$u(t,x)=\frac{\exp\left(-\left(b^{(1)}+b^{(2)}\right)a^{-1}t\right)}{b^{(1)}-b^{(2)}}\Big[\left(b^{(1)}\exp\left(b^{(1)}t\right)-b^{(2)}\exp\left(b^{(2}t\right)\right)\varphi(x+at)+$$
$$+\left(\exp\left(b^{(1)}t\right)-\exp\left(b^{(2)}t\right)\right)\left(\psi(x+at)-a\varphi'(x+at)\right)\Big]. \tag{2.9}$$

3. Обоснование условий согласования. Функции $g_j(y), j=1,2,$ определенные формулой (2.8) и дифференциальным уравнением (1.1), при достаточной гладкости заданных функций $\varphi, \psi, \mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ должны принадлежать классу $C^{(2)}[0,\infty)$. Гладкость заданных функций уточним ниже. В силу этого на стыке $y=l$ потребуем выполнения условий непрерывности функций $g_j^{(i)}, i=0,1, j=1,2,$ и их производных до второго порядка включительно, т. е.

$$g_j^{(0)}(l)=g_j^{(1)}(l), \frac{d}{dy}g_j^{(0)}(l)=\frac{d}{dy}g_j^{(1)}(l), \frac{d^2}{dy^2}g_j^{(0)}(l)=\frac{d^2}{dy^2}g_j^{(1)}(l), j=1,2.$$

Заметим, что непрерывность функций $g_j^{(i)}, i=0,1, j=1,2,$ была учтена в формуле (2.7) при интегрировании системы (2.6). Из равенства $\frac{d}{dy}g_j^{(0)}(l)=\frac{d}{dy}g_j^{(1)}(l), j=1,2,$ имеем

$$-\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)}+b^{(2)}}{a}l\right)\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right)-b^{(1)}\beta\varphi'(l)-\beta\psi'(l)+a\beta\varphi''(l)=0;$$

$$\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)}+b^{(2)}}{a}l\right)\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right)-\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)}}{a}l\right)\mu^{(2)}(0)+b^{(2)}\beta\varphi'(l)+\beta\psi''(l)-a\beta\varphi''(l)=0.$$

Аналогичным образом вычисляются и приравниваются вторые производные. После несложных преобразований полученных равенств имеем следующие условия согласования:

$$\varphi'(l)=\mu^{(2)}(0); \tag{3.1}$$

$$\psi'(l)=\mu^{(2)'}(l); \tag{3.2}$$

$$\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)}+b^{(2)}}{a}l\right)\mu^{(1)}\left(\frac{l}{a}\right)=\left(b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)-b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right)\right)\varphi'(l)-\beta\psi'(l)+a\beta\varphi''(l); \tag{3.3}$$

$$\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)\exp\left(\frac{b^{(1)}+b^{(2)}}{a}l\right)\mu^{(1)'}\left(\frac{l}{a}\right)=b^{(1)}b^{(2)}\beta\varphi'(l)-a\left(b^{(1)}+b^{(2)}\right)\beta\varphi''(l)+$$
$$+a^2\beta\varphi^{(3)}(l)+\left(b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right)-b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)\right)\psi'(l)-a\beta\psi''(l), \tag{3.4}$$

в которых $f(t,x)\equiv 0,$ в связи с тем, что (2.2) – решение задачи (2.1), (1.2), (1.3).

Теорема 1. *Пусть* $f(t,x)=0, \varphi\in C^{(3)}[0,\infty), \psi\in C^{(2)}[0,\infty), \mu^{(1)}\in C^{(1)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\quad \mu^{(2)}\in C^{(1)}[0,\infty),$ *и выполнены условия согласования* (3.1) – (3.4). *Тогда существует единственное классическое решение граничной задачи* (2.1), (1.2), (1.3) $u(t,x)\in C^{(2)}(\bar{Q})$.

4. Неоднородное уравнение. Рассмотрим решение граничной задачи (1.1) – (1.3) для неоднородного уравнения (1.1). Согласно методу Дюамеля [7] решение уравнения ищем в виде суммы двух функций $u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+v(t,x)$,

где
$$v(t,x)=\int_0^t \omega(t-\tau,\tau,x)d\tau,$$

а задача для определения $\omega(t,\tau,x)$ приводится ниже.

Функция $\omega:[0,\infty)\times[0,\infty)\times\bar{\Omega}\supset(t,\tau,x)\to\omega(t,\tau,x)\in\Re$ является решением задачи

$$\Im\omega=0,\quad t,\tau\in[0,\infty), x\in\bar{\Omega};$$
$$\omega\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\tau,x)=0,\quad \partial_t\omega\big|_{t=0}=\tilde{\psi}(\tau,x)=f(\tau,x),\ \tau\in[0,\infty), x\in\bar{\Omega};$$
$$\partial_x\omega\big|_{x=0}=\tilde{\mu}^{(1)}(t,\tau)=A\int_l^{at}\frac{\partial f}{\partial s}(\tau,s)ds+B\int_l^{at}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(\tau,s)ds+E\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,l), t>\frac{l}{a}, \tau\in[0,\infty); \tag{4.1}$$
$$\partial_x\omega\big|_{x=l}=\tilde{\mu}^{(2)}(t,\tau)=t\frac{\partial f}{\partial x}(t,\tau),\ \tau\in[0,\infty).$$

Постоянные A, B, E выбираются таким образом, чтобы для граничной задачи (4.1) выполнялись условия согласования (3.1) – (3.4). Легко показать, что в этом случае

$$A=\frac{1}{a\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)}\exp\left(-\frac{b^{(1)}+b^{(2)}}{a}l\right)\left(b^{(1)}\exp\left(\frac{b^{(2)}l}{a}\right)-b^{(2)}\exp\left(\frac{b^{(1)}l}{a}\right)\right);$$
$$B=E=-\frac{D}{\left(b^{(1)}-b^{(2)}\right)}\exp\left(-\frac{b^{(1)}+b^{(2)}}{a}l\right).$$

Граничная задача для функции $v(t,x)$ примет вид

$$\Im v(t,x)=f(t,x),\quad t\in[0,\infty),\quad x\in\bar{\Omega};$$
$$v\big|_{t=0}=\bar{\varphi}(x)=0,\quad \partial_t v\big|_{t=0}=\bar{\psi}(x)=0,\quad x\in\bar{\Omega};$$
$$\partial_x v\big|_{x=0}=\bar{\mu}^{(1)}(t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\omega(t-\tau,\tau,0)\,d\tau,\quad t>\frac{l}{a};$$
$$\partial_x v\big|_{x=l}=\bar{\mu}^{(2)}(t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\omega(t-\tau,\tau,l)d\tau,\ t>0.$$

Для $\tilde{u}(t,x)$ соответственно

$$\Im\tilde{u}(t,x)=0, \tag{4.2}$$
$$\tilde{u}\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \partial_t\tilde{u}\big|_{t=0}=\psi(x),\ x\in\bar{\Omega}; \tag{4.3}$$
$$\partial_x\tilde{u}\big|_{x=0}=\hat{\mu}^{(1)}(t)=\mu^{(1)}(t)-\bar{\mu}^{(1)}(t),\ t>\frac{l}{a}; \tag{4.4}$$
$$\partial_x\tilde{u}\big|_{x=l}=\hat{\mu}^{(2)}(t)=\mu^{(2)}(t)-\bar{\mu}^{(2)}(t),\ t>0, \tag{4.5}$$

где
$$\hat{\mu}^{(1)}(t)=\mu^{(1)}(t)-\left[A\int_0^t\int_l^{a(t-\tau)}\frac{\partial f}{ds}(\tau,s)dsd\tau+B\int_0^t\int_l^{a(t-\tau)}\frac{\partial^2 f}{ds^2}(\tau,s)dsd\tau+E\int_0^t\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,l)d\tau\right]; \tag{4.6}$$

$$\hat{\mu}^{(2)}(t)=\mu^{(2)}(t)-\int_0^t(t-\tau)\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,l)\,d\tau. \tag{4.7}$$

Решение задачи по нахождению функции $\tilde{u}(t,x)$ сводится к решению задачи (2.1), (1.2), (1.3), поэтому для начальных и граничных условий должны выполняться условия согласования (3.1) – (3.4). Для проверки этих условий в формулы (3.1) – (3.4) подставим выражения (4.3) – (4.7) для начальных и граничных условий в случае однородного уравнения (4.2). С учетом этих условий для функции $u=\tilde{u}+v$ получим условия согласования (1.4) – (1.7).

Таким образом, полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi\in C^{(3)}[0,\infty), \psi\in C^{(2)}[0,\infty), \mu^{(1)}\in C^{(1)}\left[\frac{l}{a},\infty\right)$, $\mu^{(2)}\in C^{(1)}[0,\infty)$, *и выполнены условия согласования* (1.4) – (1.7). *Тогда существует единственное классическое решение граничной задачи* (1.1) – (1.3) *в классе функций* $C^{(2)}(\bar{Q})$ *вида* $u=\tilde{u}+v$.

Замечания. 1. Если сравнить результаты данной статьи с результатами работы [4], где рассмотрено классическое решение аналогичной задачи с условиями Дирихле на боковых линиях границы полуполосы, то можно заметить, что при наличии граничных условий Неймана условий согласования на два меньше. Другими словами, при решении задачи Дирихле по сравнению с задачей Неймана условий согласования на два больше.

2. В случае нестрого гиперболического уравнения по сравнению со строго гиперболическим для одних и тех же граничных задач для определения классических решений требования на гладкость заданных функций, входящих в начальные и граничные условия, более высокие.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Than D. V., Mikio T., Nguen D. S. The characteristic method and its generalizations for first-order nonlinear partial differential equations. New York ; Washington, 2000.

2. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. Классическое решение второй граничной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка // Сб. тр. Третьей междунар. науч. конф. НАН Беларуси (Брест, 17–22 сент. 2012 г.). Минск, 2012. С. 171–177.

3. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ширма М. С. Решение первой смешанной задачи для волнового уравнения методом характеристик // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 23–34.

4. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. Классическое решение первой граничной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 1. С. 64–67.

5. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. Гиперболическое уравнение второго порядка в случае двух независимых переменных // Весцi НАН Беларусi. 2013. № 1. С. 71–78.

6. Корзюк В. И., Козловская И. С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.

7. Корзюк В. И. Уравнения математической физики : учеб. пособие. Минск, 2011.

Поступила в редакцию 03.11.2013.

Виктор Иванович Корзюк – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Беларуси, заведующий кафедрой математической физики.

Елена Сергеевна Чеб – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики.