УДК 512.543.76

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, И. О. ГОВОРУШКО

О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА

Группа G называется нехопфовой, если она изоморфна своей собственной факторгруппе. Баумслаг и Солитер построили примеры нехопфовых групп с двумя образующими и одним соотношением, которые имеют копредставление $BS(p,q)=\left\langle a,t \middle| t^{-1}a^{p}t=a^{q}\right\rangle$. Если p, q имеют различные множества простых делителей, то группа $BS(p,q)$ не является хопфовой. Будем считать, что p и q – взаимно простые числа. В статье дается описание многообразий n-мерных представлений $R_n(BS(p,q))$. Доказано, что каждая неприводимая компонента $R_n(BS(p,q))$ является унирациональным многообразием размерности n^2. Количество неприводимых компонент равно числу классов сопряженности матриц $A\in GL_n(K)$ таких, что A^p и A^q сопряжены.

Ключевые слова: многообразие представлений; группа Баумслага – Солитера; неприводимая компонента; размерность; линейное представление.

A group G is said to be non-Hopfian if it is isomorphic to one of its proper quotients. Baumslag and Solitar constructed examples of non-Hopfian groups with two generators and one relation, which have a presentation $BS(p,q)=\left\langle a,t \middle| t^{-1}a^{p}t=a^{q}\right\rangle$. If p, q have distinct sets of prime divisors, then the group $BS(p,q)$ is non-Hopfian. We will assume that p and q are coprime. In the paper we give a description of the variety of n-dimensional representations $R_n(BS(p,q))$. It is proved that any irreducible component of $R_n(BS(p,q))$ is unirational variety of dimension n^2. The number of irreducible components is equal to the number of conjugacy classes of matrices $A\in GL_n(K)$ such that A^p and A^q are conjugate.

Key words: a representation variety; a Baumslag – Solitar group; an irreducible component; a dimension; a linear representation.

Группа G называется *хопфовой*, если всякий эпиморфизм $f: G\to G$ является автоморфизмом. Соответственно, группа G нехопфова, если она изоморфна своей собственной факторгруппе.

Баумслагом и Солитером в [1] впервые предложены примеры нехопфовых конечно представленных групп. Группы Баумслага – Солитера $BS(p,q)$ имеют копредставление

$$BS(p,q)=\left\langle a,t \middle| t^{-1}a^{p}t=a^{q}\right\rangle.$$

В [1] доказано, что если $|p|>1$, $|q|>1$ и числа p, q имеют различные множества простых делителей, то группа $BS(p,q)$ не является хопфовой. В дальнейшем будем считать, что p и q – взаимно простые числа. В [2] описаны все неприводимые представления группы $BS(p,q)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Ф. А. Дудкин [3] указал все неприводимые представления произвольной подгруппы конечного индекса группы $BS(p,q)$ над полем $\mathbb{C}$.

В работе дается описание многообразий представлений $R_n(BS(p,q))$. Напомним [4], что если $G=<g_1,\dots,g_m>$ – конечно порожденная группа и K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, то любому представлению $\rho: G\to GL_n(K)$ можно поставить в соответствие набор элементов

$$(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))\in GL_n(K)^m.$$

Очевидно, что этот набор удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы G. Поэтому соответствие $\rho\mapsto(\rho(g_1),\dots,\rho(g_m))$ в действительности задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(G,GL_n(K))$ и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R_n(G)\subset GL_n(K)^m$, называемого многообразием n-мерных представлений группы G.

Чтобы сформулировать основную теорему, необходимо ввести обозначения. Представим через $\Omega(p,q)$ следующее множество матриц:

$$\Omega(p,q)=\{A\in GL_n(K)\mid A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\}.$$

Пусть $A\in\Omega(p,q)$ – фиксированная матрица и $B_0\in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0^{-1}A^pB_0=A^q$. Обозначим через $Z(A)$ централизатор матрицы A в $GL_n(K)$ и рассмотрим морфизм

$$f_A: Z(A)\times GL_n(K)\to GL_n(K)\times GL_n(K),\quad (C,X)\mapsto\left(XAX^{-1},XCB_0X^{-1}\right).$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} f_A$ обозначим $W(A)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. 1. *Каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой многообразия $R_n\left(BS(p,q)\right)$ размерности n^2, и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n\left(BS(p,q)\right)$.*

2. *Каждое многообразие $W(A)$ есть унирациональное многообразие.*

3. *Число неприводимых компонент многообразия $R_n\left(BS(p,q)\right)$ равно числу классов сопряженности матриц в множестве $\Omega(p,q)$.*

Важную роль в доказательстве теоремы играет следующая лемма.

Лемма. *Пусть $A\in\Omega(p,q)$. Тогда $Z(A)=Z(A^p)=Z(A^q)$.*

Доказательство леммы. Пусть для определенности $p>q$ и $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – все собственные значения матрицы A. Покажем вначале, что каждое α_i – корень из единицы степени p^s-q^s для некоторого s, $1\le s\le n$. Рассмотрим, например, α_1. Поскольку матрицы A^p и A^q подобны, то набор $\left(\alpha_1^p,\ldots,\alpha_n^p\right)$ является перестановкой набора $\left(\alpha_1^q,\ldots,\alpha_n^q\right)$. Тогда мы должны иметь цепочку равенств

$$\alpha_1^p=\alpha_{i_1}^q;\ \alpha_{i_1}^p=\alpha_{i_2}^q,\ \ldots,\ \alpha_{i_{s-1}}^p=\alpha_1^q$$

для некоторого s, $1\le s\le n$. Из этих равенств последовательно получаем

$$\alpha_1^{p^2}=\alpha_{i_1}^{pq}=\alpha_{i_2}^{q^2};\ \alpha_1^{p^3}=\alpha_{i_2}^{pq^2}=\alpha_{i_3}^{q^3},\ \ldots,\ \alpha_1^{p^{s-1}}=\alpha_{i_{s-2}}^{pq^{s-2}}=\alpha_{i_{s-1}}^{q^{s-1}};\ \alpha_1^{p^s}=\alpha_{i_{s-1}}^{pq^{s-1}}=\alpha_1^{q^s},$$

откуда $\alpha_1^{p^s-q^s}=1$.

Покажем теперь, что если $\alpha_i\ne\alpha_j$, то $\alpha_i^p\ne\alpha_j^p$ и $\alpha_i^q\ne\alpha_j^q$. Выше мы показали, что найдутся s_1 и s_2 такие, что $\alpha_i^{p^{s_1}-q^{s_1}}=\alpha_j^{p^{s_2}-q^{s_2}}=1$. Следовательно, оба числа α_i и α_j – корни из единицы степени $\left(p^{s_1}-q^{s_1}\right)\left(p^{s_2}-q^{s_2}\right)$. Поэтому дробь $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ также является корнем из единицы степени $\left(p^{s_1}-q^{s_1}\right)\left(p^{s_2}-q^{s_2}\right)$. Предположим, что $\alpha_i^p=\alpha_j^p$. Тогда $\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)^p=1$, т. е. $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ есть корень степени p из единицы. Поскольку числа $p^{s_1}-q^{s_1}$ и $p^{s_2}-q^{s_2}$ взаимно просты с p, то произведение $\left(p^{s_1}-q^{s_1}\right)\left(p^{s_2}-q^{s_2}\right)$ также взаимно просто с p. Следовательно, $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}=1$, т. е. $\alpha_i=\alpha_j$ – противоречие. Аналогично доказывается, что $\alpha_i^q\ne\alpha_j^q$.

Докажем теперь равенство централизаторов $Z(A)=Z\left(A^p\right)$. Включение $Z(A)\subset Z\left(A^p\right)$ очевидно. Доказанное выше означает, что если жорданова нормальная форма матрицы A содержит ровно r клеток Жордана порядка k с собственным значением α_i, то жорданова нормальная форма матрицы A^p содержит ровно r клеток Жордана порядка k с собственным значением α_i^p. Тогда из теоремы 2 из [5] следует, что $\dim Z(A)=\dim Z\left(A^p\right)$. Значит, $Z(A)=Z\left(A^p\right)$. Аналогично доказывается, что $Z(A)=Z\left(A^q\right)$.

Доказательство теоремы. Покажем вначале, что образ $\operatorname{Im} f_A$ морфизма f_A содержится в $R_n\left(BS(p,q)\right)$. Действительно,

$$\left(CB_0\right)A^p\left(CB_0\right)^{-1}=C\left(B_0A^pB_0^{-1}\right)C^{-1}=CA^qC^{-1}=A^q,$$

поскольку в силу леммы $C\in Z(A)=Z\left(A^q\right)$. Значит, $\left(A,CB_0\right)\in R_n\left(BS(p,q)\right)$. Поэтому сопряженная пара $\left(XAX^{-1},XCB_0X^{-1}\right)$ также принадлежит $R_n\left(BS(p,q)\right)$.

Найдем слои морфизма f_A. Пусть $\left(A_1,B_1\right)=f_A\left(C_1,X_1\right)\in\operatorname{Im} f_A$. Тогда

$$X_1AX_1^{-1}=A_1,\ X_1C_1B_0X_1^{-1}=B_1.$$

В этом случае $f_A^{-1}(A_1, B_1)$ состоит из пар матриц $(C, X) \in Z(A) \times GL_n(K)$ таких, что

$$XAX^{-1} = A_1 = X_1AX_1^{-1}, \ XCB_0X^{-1} = B_1 = X_1C_1B_0X_1^{-1}. \tag{1}$$

Из первого равенства в (1) получаем $X_1^{-1}X = D \in Z(A)$, т. е. $X = X_1D$. Теперь из второго равенства в (1) имеем $C = D^{-1}C_1B_0DB_0^{-1}$. Заметим, что если D – произвольная матрица из $Z(A)$, то пара матриц (C, X), где

$$X = X_1D, \ C = D^{-1}C_1B_0DB_0^{-1},$$

лежит в слое $f_A^{-1}(A_1, B_1)$. Действительно, равенство $XAX^{-1} = A_1$ очевидно из построения. Проверим, что справедливо равенство $(CB_0)A^p(CB_0)^{-1} = A^q$. Подставив вместо C его значение и учитывая, что в силу леммы $D, C_1 \in Z(A) = Z(A^p) = Z(A^q)$ и $B_0A^pB_0^{-1} = A^q$, получим

$$(CB_0)A^p(CB_0)^{-1} = \left(D^{-1}C_1B_0D\right)A^p\left(D^{-1}C_1B_0D\right)^{-1} = D^{-1}C_1\left(B_0A^pB_0^{-1}\right)C_1^{-1}D = D^{-1}C_1A^qC_1^{-1}D = A^q.$$

Таким образом, имеем биективный морфизм

$$h: Z(A) \to f_A^{-1}(A_1, B_1), \ D \mapsto \left(D^{-1}C_1B_0DB_0^{-1}, X_1D\right).$$

Значит,

$$\dim f_A^{-1}(A_1, B_1) = \dim Z(A), \tag{2}$$

т. е. все слои морфизма f_A имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(A)$. По теореме о размерности слоев морфизма [6], учитывая (2), получаем

$$\dim W(A) = \dim\left(Z(A) \times GL_n(K)\right) - \dim Z(A) = \dim Z(A) + n^2 - \dim Z(A) = n^2.$$

Таким образом, $\dim W(A) = n^2$ для всех матриц $A \in \Omega(p, q)$.

Докажем, что многообразия $W(A)$ являются неприводимыми компонентами многообразия представлений $R_n(BS(p,q))$. Очевидно, что многообразия $W(A)$ неприводимы. Нетрудно заметить, что если матрицы A и A_1 из $\Omega(p,q)$ подобны, то соответствующие многообразия $W(A)$ и $W(A_1)$ совпадают. Покажем, что многообразия $W(A)$ и $W(A_1)$, соответствующие неподобным матрицам A и A_1 из $\Omega(p,q)$, не могут содержаться друг в друге. Допустим, $W(A) \subset W(A_1)$. В силу совпадения размерностей мы должны иметь $W(A) = W(A_1)$. Поскольку f_A и f_{A_1} – доминантные морфизмы, то существуют открытые, по Зарисскому, подмножества $U_1 \subset W(A)$ и $U_2 \subset W(A_1)$ такие, что $U_1 \subset \operatorname{Im} f_A$ и $U_2 \subset \operatorname{Im} f_{A_1}$. Тогда $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Пусть $(C, D) \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся элементы (C_1, X_1) и (C_2, X_2) такие, что $f_A(C_1, X_1) = f_{A_1}(C_2, X_2) = (C, D)$. Это означает: $X_1AX_1^{-1} = X_2A_1X_2^{-1}$ – противоречие с тем, что матрицы A и A_1 не сопряжены друг с другом.

В заключение доказательства утверждения 1 теоремы достаточно заметить, что $R_n(BS(p,q)) = \cup_{A \in \Omega(p,q)} W(A)$. Таким образом, каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой размерности n^2 многообразия представлений $R_n(BS(p,q))$. При этом если матрицы A и A_1 из $\Omega(p,q)$ неподобны, то $W(A)$ и $W(A_1)$ – различные компоненты, откуда следует утверждение 3 теоремы.

Унирациональность каждой компоненты $W(A)$ следует из того, что $W(A)$ есть замыкание образа рационального многообразия $Z(A) \times GL_n(K)$ относительно регулярного отображения. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-hopfian groups // Bull. AMS. 1962. Vol. 68, № 3. P. 199–201.
2. McLaury D. Irreducible Representations of Baumslag – Solitar Groups // J. Group Theory. 2012. Vol. 15, № 4. P. 543–552.
3. Дудкин Ф. А. Неприводимые представления подгрупп конечного индекса групп Баумслага – Солитера // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1273–1279.
4. Lubotzky A., Magid A. Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58, № 336. P. 1–116.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967. С. 205.
6. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М., 1988. Т. 1. С. 97.

Поступила в редакцию 14.03.2014.

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации.

Игорь Олегович Говорушко – аспирант кафедры высшей алгебры и защиты информации.