

## **ИССЛЕДОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКЕ В БГУ**

Начало экономико-математическим исследованиям в БГУ положил научный семинар, организованный в 1968 г. профессором В. А. Емеличевым (позднее этим семинаром стал руководить М. М. Ковалев). Из экономико-математического семинара БГУ вышли многие доктора и кандидаты наук, посвятившие свою научную карьеру математической экономике, исследованию операций и теории принятия решений, экономической информатике: М. К. Кравцов, В. Е. Микульский, А. А. Просяной, В. А. Пирьянович, Н. Н. Писарук, А. А. Запорожец, А. Г. Тарновский, Н. А. Наумович, А. П. Крачковский, Э. Гирлих и В. Хоппе (Германия), П. Миланов и Е. Димов (Болгария), А. Качкаров и Х. Шунгаров (Россия), А. Рамазанов (Азербайджан), Г. Болоташвили и А. Топчишвили (Грузия), Сварна Редди (Индия), Гассан Фуити и Аль-Сальти (Сирия), Курума (Гвинея), Буй Кат Тьонг, До Зуй Чинь и Нгуен Нгия (Вьетнам).

Семинар продолжает свою работу сегодня уже на экономическом факультете, организованном в 1999 г. на базе отделения политэкономии (экономической теории), существовавшего в БГУ с 1966 г., и ученых экономико-математического направления ФПМИ. На экономическом факультете сегодня достаточно хорошо представлены научные исследования в области математической экономики, финансовой инженерии и экономической информатики.

Экономико-математические исследования в БГУ продолжают также на факультетах прикладной математики и информатики, механико-математическом. Глубокие научные результаты в области оптимального управления получены в БГУ школой профессора Р. Габасова. Отдельные его ученики исследовали и чисто экономические проблемы [12], а также подготовили учебные пособия по математической экономике [3, 4].

С 1972 г. в БГУ начала складываться научная школа профессора Ю. С. Харина по эконометрике [5–8]. Повышению уровня эконометрических исследований будет служить подготовленное на экономическом факультете учебное пособие С. А. Бородича [9], а также практические исследования по эконометрике, широко ведущиеся в БГУ совместно с Национальным банком [10–12].

С появлением в Беларуси рынка страховых услуг возник интерес к проблемам актуарной математики; данное направление возглавил профессор Г. А. Медведев [13], см. также [14, 15].

## **ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВ, ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕВЫХ ЗАДАЧ И ТРАНСПОРТНЫХ МНОГОГРАННИКОВ**

Изучение задач регионального размещения, специализации и унификации производств было центральным в первых опытах ученых БГУ по математическому моделированию экономических процессов [16–19]. Именно задачи размещения производительных сил в Беларуси послужили толчком к разработке оригинального метода построения последовательности планов [20], синтезировавшего идеи метода ветвей и границ и динамического программирования. Позднее этот метод, дополненный различными идеями сокращения перебора вариантов, нашел применение при решении задач оптимального планирования на предприятиях, объединениях и в отраслях народного хозяйства, в частности на белорусском заводе «Азовкабель» при выборе портфеля заказов.

В теоретическом плане наиболее значимые результаты были получены по модельной задаче линейного программирования – транспортной. Впервые данную задачу поставил главный интендант Наполеона, выдающийся французский ученый Монж<sup>1</sup>. Позднее ей уделяли значительное внимание Л. В. Канторович и Т. Купманс – лауреаты Нобелевской премии за 1975 г. Белорусские ученые глубоко исследовали множество всех вариантов транспортных планов как для простых задач Монжа, так и для существенных усложнений, моделирующих, например, многопродуктовость [22, 23]. Результаты были обобщены в монографии В. А. Емеличева, М. М. Ковалева и М. К. Кравцова [24], которая сразу же после издания в 1981 г. получила признание и была переведена в немецком академическом издательстве и в издательстве Кембриджского университета. В дальнейшем ученые БГУ много внимания уделили изучению сетевых задач оптимизации, которые в современной глобальной (иногда ее называют информационно-сетевой) экономике становятся главным модельным инструментом.

### **МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ**

Если понимать экономику как науку о рациональном использовании ограниченных ресурсов, то модели и методы оптимального распределения ресурсов являются центральными в математической

---

<sup>1</sup> Современная трактовка свойства Монжа дана в [21].

экономике. Вместе с тем термином *allocation problems* определяется конкретный класс экономико-математических моделей вида

$$\max \sum_{i=1}^n f_i(x_i); \sum_{i=1}^n x_i = K$$

при различных дополнительных ограничениях. Здесь  $K$  – наличный ресурс,  $f_i(x_i)$  – эффективность его использования в секторе  $i$ . Начиная с монографий [25, 26], ученые БГУ данному классу моделей уделяли много внимания. Основными результатами, признанными за рубежом [27, 28], являются следующие:

- описаны все классы дополнительных ограничений, при которых greedy-решения, т. е. решения, построенные алгоритмами координатного и бикоординатного подъема, являются оптимальными [29–32];
- построены из ненадежных методов их композиции, обладающие высокой точностью [33, 34];
- построены модели оптимального управления активами и пассивами коммерческого банка [58]. В частности, полиматроидные подходы, предложенные для общих задач распределения ресурсов, в последнее время были успешно применены для диагностики банка и формирования оптимального инвестиционного портфеля [36].

### ВЫПУКЛЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ

Общеизвестна роль выпуклых функций в экономике. Исследование экономических задач с неделимыми ресурсами потребовало построить дискретный аналог выпуклого анализа. Одна из возможных моделей дискретного выпуклого анализа была построена в цикле работ [37–43] на основе функций, заданных на частично упорядоченных множествах, обладающих свойством монотонности градиентов – приращений функций вдоль цепей. Благодаря развитому в этих работах аппарату выпуклости на множествах, упорядоченных частичным порядком, были исследованы сложностные оценки задачи поиска локальных экстремумов выпуклых функций дискретного аргумента, основанные на установленных связях с проблематикой монотонных булевых функций многозначной логики [44]. Построены оптимальные (по Шеннону) алгоритмы максимизации выпуклых и субмодулярных на решетках функций. Установлены верхние границы *sgf*-оценки трудоемкости нового метода поиска экстремумов – метода центрального элемента [45].

Выяснена связь выпуклых и матроидных структур на основе концепции выпуклости по Менгеру в координатных решетках (координатная выпуклость) и найдены необходимые условия совпадения

локальных и глобального максимумов [46]. Исследована возможность точного решения задач целочисленного программирования дискретными аналогами градиентных методов. В частности, полностью описаны классы задач, точно решаемых алгоритмами координатного и бикоординатного подъема и их обобщений [46].

Дана аксиоматизация обобщенных матроидных структур в координатных решетках, для которых выполнена только одна матроидная аксиома – аксиома Штейница; установлены связи подобных матроидных структур и выпуклых в менгеровском смысле множеств. В частности, предложен метод индуцирования полиматроидов потоками в сетях и на его основе построены методы решения наиболее общей потоковой задачи – задачи с полиматроидными ограничениями и выпуклыми стоимостными функциями. Доказано, что бикоординатные алгоритмы (алгоритмы замен) решают любую задачу выпуклой дискретной оптимизации лишь в случае, когда допустимое множество есть обобщенный суперматроид [32].

Предложены методики оценки точности градиентных алгоритмов максимизации выпуклых функций на различных подмножествах целочисленной решетки, с помощью которых получен ряд неулучшаемых оценок; из оценок точности алгоритмов координатного спуска с растяжением градиентов, в частности, вытекает ряд известных результатов для задач о рюкзаке, о покрытии, целочисленного программирования с неотрицательными параметрами, коммивояжера [47, 48].

Матроидный подход применен для разработки новых методов декомпозиции [49] параметрического анализа [50], сетевых задач [51], гиперболических задач [52].

Заметим, что итоговая статья по порядковой выпуклости была рекомендована к публикации академиком Л. Канторовичем [49]. В целом результаты по применению порядковой выпуклости и матроидного подхода были суммированы в монографии [53].

### **ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА (агрегирование предпочтений)**

Аксиомы, математические модели и теоремы коллективного выбора служат для формализации конкретных ситуаций в распределении затрат и благ при различных представлениях о справедливости, или, в другой терминологии, для поиска компромисса между равенством и эффективностью.

Вместе с тем теория коллективного выбора, безусловно, имеет более широкое применение – от проблем голосования и принятия других важных общественных решений до локальных задач принятия решений рейтинга экономических субъектов (банков, государств, университетов). Фундаментальная проблема теории оптимального выбора – агрегирование индивидуальных предпочтений, т. е. построение коллективного предпочтения. Для этого важно иметь линейное описание многогранника предпочтений. Первые результаты обобщения перестановочных полиматроидов [54], были получены в монографии [24] и развиты в многочисленных статьях М. М. Ковалева, Э. Гирлиха, А. М. Исаченко, А. А. Запорожца, Д. М. Василькова. Ссылки см. в [55, 56]. Новый подход был сформулирован в [57] как метод порождения описаний многогранника линейных порядков, или *linear ordering polytope*, или *approval-voting polytope*.

Полученные по многограннику теоретические результаты *linear ordering problem* были успешно применены в самых разных моделях агрегирования предпочтений:

- научных экспертов при анализе и ранжировании инновационных проектов [58] или членов тендерных комиссий для выявления победителей в тендерах [59];
- надежности банков [60];
- инвестиционного риска государств [61];
- сертификации университетов [62];
- рейтинговых комиссий при сравнительном анализе и сертификации программного обеспечения на примере автоматизированных банковских систем [63].

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМУМОВ ПАРЕТО

Общеизвестна роль оптимумов В. Парето в экономической теории и практике. В. А. Емеличевым, М. К. Кравцовым и М. М. Ковалевым в сотрудничестве с учеными из Запорожья и Магдебурга было предпринято масштабное изучение структуры множества оптимумов Парето в задачах с неделимыми ресурсами, т. е. в многокритериальных задачах линейного целочисленного программирования [64–69]. Исследования велись в двух направлениях: первое – оценки числа и сложности нахождения оптимумов Парето, второе – стабильность и устойчивость оптимумов Парето при различных возмущениях исходных данных. В частности, описаны ситуации со стабильным множеством Парето, найдены формулы для радиусов устойчивости, стабильности.

Проблема устойчивости изучалась не только для оптимумов Парето, но и для других определений эффективных планов, например оптимальных по М. Смейлу, А. Слейтеру. Результаты по устойчивости, квазиустойчивости и стабильности паретовских оптимумов могут послужить хорошим инструментом в моделировании траекторий устойчивого экономического роста.

### ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Аппарат теории игр экономисты-математики БГУ использовали не так уж часто. Тем не менее значительный интерес представляет обобщение классических матричных игр, введенное Н. Н. Писаруком (см., например, [70]), с помощью зависимых смешанных стратегий.

$$\sum p_i = 1, p_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$
$$r_2(I) \leq \sum_{i \in I} p_i \leq r_1(I), I \subseteq \{1, \dots, n\},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – соответственно субмодулярная и супермодулярная функции.

Дополнительные ограничения на смешанные стратегии без существенных усложнений позволили значительно разнообразить практические ситуации, моделируемые с помощью подобных обобщений матричных игр. В частности, были построены интересные модели севооборота в условиях неопределенностей с типом будущей летней погоды. В дальнейшем опять же Н. Н. Писаруком с помощью аппарата субмодулярных функций были получены оригинальные результаты для игр на сетях [71].

### ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Задачи производственного менеджмента и логистики в экономико-математическом направлении наиболее часто находят практическое применение, а методы их решения иногда прямо встраиваются в гибкие производственные системы. По данному направлению в Минске, в Институте технической кибернетики Академии наук, сложилась мирового уровня школа ученых-математиков, возглавляемая В. С. Танаевым. Кратко коснемся некоторых примыкающих к ним по тематике работ экономико-математического направления, развиваемых в БГУ:

- в 80-е гг. широко применялись в СССР и в ГДР разработанные в [71–74] модели оптимальной стандартизации и унификации;
- для классической задачи линейного программирования – задачи о рациионе – в 90-х гг. были построены новые оригинальные модели –

минимизации невязок в нелинейной модели [75], что позволило М. А. Воробьеву создать универсальную программу «рацион», до сегодняшнего дня рассчитывающую смеси в технологических процессах на десятках комбикормовых заводов СНГ. Позднее был создан универсальный пакет оптимального принятия решений [76];

- существенные результаты были получены в [77] по классической задаче Л. Канторовича – задаче раскроя, на основе которых была создана программа раскроя, внедренная автором совместно с А. Г. Тарновским на многих белорусских станкостроительных предприятиях;
- широко применялись на практике модели оптимальной синхронизации производственных процессов [78–80];
- в [81] дан анализ полуонлайновых алгоритмов многопроцессорных расписаний загрузки оборудования;
- многообразны модели, разработанные в период 1975–1989 гг. в отраслевой НИЛ горнохимических предприятий БГУ для планирования и анализа экономических показателей «Беларуськалия», см., например, [80–82];
- цельная система эволюционных моделей моделирования производственных процессов на заводе «Цейс-Йена», которые только сегодня начинают широко применяться в экономике, была построена совместно с учеными Йенского университета в 1985–1987 гг. [83];
- ряд работ [84, 85] посвящен моделям выбора оптимального парка оборудования.

### ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЛЕОНТЬЕВА

Много внимания математики-экономисты БГУ уделяли обобщению и применению в белорусской практике классических моделей Леонтьева [86, 90].

В частности, предложен декомпозиционный подход к двухэтапной межотраслевой модели Леонтьева, состоящий из передела ресурсов и производства потребительских благ [57].

Многие из полученных результатов были обобщены в учебных пособиях [90, 91].

### Литература

1. *Калитин Б. С.* Динамика цены на свободном рынке: модели второго порядка // Бел. экон. жур. 1999. № 1. С. 120–127.
2. *Калитин П. С.* Динамическая модель рынка типа «эффективная конкуренция» с подсистемой объемов продаж // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2000. № 1. С. 42–46.
3. *Альсевич В. В.* Математическая экономика. Мн.: Дизайн ПРО, 1998.
4. *Альсевич В. В., Габасов Р., Глушенко В. С.* Оптимизация линейных экономических моделей. Мн.: БГУ, 2000.

5. *Малюгин В. И., Харин Ю. С. и др.* Система эконометрического моделирования и прогнозирования СЭМП. Мн.: БГУ, 1998.
6. *Kharin Yu., Pogatch P.* On statistical estimation of systems of simultaneous equations under time varying coefficients. Research Memorandum. Univ. of Leicester. 1998. № 98/7.
7. *Хацкевич Г. А.* Эконометрическое моделирование и анализ неустойчивых экономических процессов. Мн.: НИУиП, 2000.
8. *Харин Ю. С., Малюгин В. И. и др.* Основы имитационного и статистического моделирования. Мн.: Дизайн ПРО, 1997.
9. *Бородич А. С.* Вводный курс эконометрики. Мн.: БГУ, 2000.
10. *Возный А. В., Бородич А. С.* Структурные изменения детерминант покупательной способности белорусского рубля // Квартал. бюл. клуба экономистов. Мн.: Пропилеи, 2000. С. 39–44.
11. *Ковалев М. М.* Как обуздать инфляцию? // Банкаўскі веснік. 2001. № 4. С. 8–15.
12. *Ковалев М. М., Швайко П. Л.* Анализ конъюнктурообразующих факторов рынка краткосрочных облигаций // Бел. банк. бюл. 2000. № 3. С. 51–55.
13. *Медведев Г. А.* Математические модели финансовых рисков. Мн.: БГУ, 1999.
14. *Аванесов Э. Т., Ковалев М. М., Руденко В. Г.* Финансово-экономические расчеты: анализ инвестиций и контрактов. Мн., 1998.
15. *Казанцева О., Ковалев М.* 10 уроков актуарной математики для инвесторов // Мн.: Ассоц. бел. банков, 1998.
16. *Емеличев В. А., Шлефрин В. И.* Некоторые экстремальные задачи специализации литейного производства // Экономика и матем. методы. 1968. № 4. Вып. 1.
17. *Емеличев В. А., Клебанов И. Ф., Комлик В. И.* Возможности использования электронно-вычислительных машин и методов математического программирования для решения задач размещения производства // Материалы Межрегионального семинара ООН по размещению промышленности и региональному развитию. Мн.: Изд-во ООН, 1969.
18. *Емеличев В. А., Ковалев М. М.* Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов // Известия АН БССР. 1970. № 6. С. 65–74; 1972. № 1. С. 27–34.; См. также: *Емеличев В. А., Ковалев М. М.* О локальных минимумах в транспортной задаче с выпуклыми по Шуру функциями цели. Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1972. № 12. С. 1312–1316. Англ. версия: *Emelichev V., Kovalev M.* On local minima in the transport problem with Schur-concave function. USSR Comput. Math. Phys. 1972. 12. № 5. P. 282–288.
19. *Медведев В. Ф., Емеличев В. А.* Разработка и использование в планировании программно-целевого метода и оптимальных макроэкономических моделей // Семинар по экономическим моделям, включая планирование комплексных (крупномасштабных) проектов развития. Женева, 1981.
20. *Емеличев В. А., Комлик В. И.* Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М.: Наука, 1981.
21. *Ковалев М. М., Запорожец А. А., Гирлих Э.* Характеризация некоторых подклассов матриц Монжа // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 1. С. 38–44. См. также: *Girlich E., Kovalev M., Moshensky A.* Conventy and Monge arrays. Magdeburg University. Preprint Math. 1993. № 12. S. 22; *Girlich E., Kovalev M., Zaporozhets A.* Subcones of submodular functions (subclasses of Monge matrices). Otto-von-Guericke University. 1994. № 29.

22. *Емеличев В. А., Кравцов М. К.* Комбинаторные задачи на транспортных многогранниках // Экономика и математические методы. 1983. Т. 19. Вып. 2.
23. *Емеличев В. А., Ковалев М. М.* Полиэдральные аспекты дискретной оптимизации // Кибернетика. 1982. № 6. С. 54–62.
24. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.; Англ. перевод: *Yemelichev V., Kovalev M., Kravtsov M.* Polytopes, graphs and optimization. Cambridge University Press, 1984.; Нем. перевод: *Emelicev V., Kovalev M., Kravcov M.* Polyeder, Graphen, Optimierung. Berlin: Wissenschaften. 1985.
25. *Kovalev M., Girlich E.* (ed) Diskrete Optimierung. Yena: Universitdt. 1985.
26. *Ковалев М. М.* Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). Мн.: БГУ, 1977.
27. *Kovalev M., Kotov V.* An analysis of greedy solution for traveling solesman problem. USSR Comput. Math. and Math. Pfys. 1981. 4. S. 1035-1038; Evaluation of gradient algorithms for knapsack and traveling salesman problems. Report CORR 91-04. University of Waterloo. 1991.
28. *Гирлих Э., Ковалев М. М., Запорожец А. А.* Полиномиальный алгоритм для задачи распределения ресурсов с полиматроидными ограничениями // Докл. АН Беларуси. 1998. 42. № 1. С. 38–44. / См. также: *Kovalev M., Zaporozhets A.* The fast greedy algorithm for resourse allocation problems with polimatroidal constraints/ Otto-von-Guericke Universitdt Magfeburg. 1994. № 16; *Girlich E., Kovalev M., Zaporozhets A.* A polynomial algorithm for resource allocation problems with polymatroid constraints // Optimization. 1996. V. 37. P. 73–86.
29. *Емеличев В. А., Овчинников В. Г.* К теории экстремума на координатных решетках // Доклады АН БССР. 1983. Т. 2. № 11. С. 972–975.
30. *Ковалев М. М., Запорожец А. А.* Многогранники альтернирующих последовательностей // Докл. АН Беларуси. 1992. 36. № 9–10. С. 786–789.
31. *Ковалев М. М.* Максимизация выпуклых функций на суперматроидах // Докл. АН БССР. 1983. 27. № 7. С. 584–587.
32. *Ковалев М. М., Писарук Н. Н.* Обобщенные матроиды // Докл. АН БССР. 1984. Т. 24. № 11. С. 971–975.
33. *Ковалев М. М., Котов В. М.* Оценка погрешности серий приближенных алгоритмов // Вестник БГУ. 1985. Сер. 1. № 3. См. также: *Kotov V., Kovalev M.* Maximium traveling salesman problem // Math. Methods Oper. Res. 1996. 43. № 2. P. 169–181.
34. *Ковалев М. М., Котов В. М.* Субоптимальные алгоритмы в целочисленном программировании // Доклады АН БССР. 1982. Т. 26. № 11. С. 969–972.
35. *Абражевич И., Ковалев М. М.* Оптимальное управление портфелем банка // Банкаўскі весн. 1990. № 6. С. 44–48.
36. *Ковалев М. М., Шибeko И. Т.* Диагностика банка // Финансовый анализ, 1997. № 9–10.
37. *Ковалев М. М.* Метод частичных порядков // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24. № 2. С. 113–116.
38. *Girlich E., Kovaliow M.* Nichtlineare Discrete Optimierung. Berlin, 1981.
39. *Ковалев М. М.* Градиентные методы максимизации выпуклых функций на дискретных структурах // Кибернетика. 1985. № 6. С. 77–85 / Пер. с англ.: *Kovalev M.* Gradient methods of maximization of convex functions on discrete structures // Cybernetics. 1985. 21. P. 819–830.

40. Димов Е. Т., Ковалев М. М. Кривизна УВН-множеств // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28, № 1. С. 9–11.
41. Ковалев М. М. Конусы симметрических и потоковых субмодулярных функций // Кибернетика. 1985. № 5. С. 122–123.
42. Ковалев М. М. Новые приложения метода частичных порядков // Кибернетика. 1985. № 2. С. 11–16 / Пер. с англ.: New application of partial orders // Cybernetics. 1985. 21. P. 160–167.
43. Ковалев М. М., Нгуен Нгуа. Порядково-выпуклые функции на целочисленных решетках // Вестн. БГУ. 1990. № 1. С. 46–49.
44. Ковалев М. М., Миланов П. Монотонные функции многозначной логики и суперматроиды // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1984. 24. № 5. С. 786–790. Пер. с англ.: Kovalev M., Milanov P. Monotonic functions of manyvalued logic and supermatroids // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1984. 24. P. 106–108. См. также: Milanov P., Kovaljov M. On the accuracy of gradient algorithm in solving integer optimization problems. C. R. Acad. Bulgarie Science: 1980. 33. P. 1459–1462.
45. Ковалев М. М., Мощенский А. В. Оракульная сложность максимизации субмодулярных функций // Докл. АН Беларуси. 1992. 36. № 2. С. 111–114. См. также: Girlich E., Kovaljow M., Moshchensky A. On complexity of maximization of submodular functions // Optimization. 1998. № 44; Kovalev M. M., Moshchenskij A. V. Optimal search of extremums of confex functions on lattices // Discrete Math. Appl. 1992. 2. № 1. P. 45–58.
46. Ковалев М. М., Писарук Н. Н. Градиентные методы в выпуклом целочисленном программировании // Докл. АН СССР. 1985. 284. № 6. С. 1322–1326. пер. с англ.: Kovalev M., Pisaruk N. Gradient methods in convex integer programming // Sov. Phys. Dokl. 1985. 30. № 10. P. 830–832.
47. Гляков П. В., Ковалев М. М., Котов В. М. Серии градиентных алгоритмов для разбиений деревьев // Вестн. БГУ. 1987. 1. № 1. С. 36–39.
48. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Рамазанов А. Б. Погрешность градиентных экстремумов строго выпуклой функции дискретного аргумента // Дискретная математика. 1990. Т. 2. Вып. 2. С. 127–137 / Пер. с англ.: Emelichev V., Kovalev M., Ramazanov A. V. Errors of gradients extreme of a strictly convex function of discrete argument // Discrete Math. Appl. 1992. 2. № 2. P. 119–131.
49. Kovalev M., Pisaruk N. A matroid approach to decomposition // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1993. 31. № 5. P. 142–154.
50. Ковалев М. М., До Зуи Чинь. Задача параметрической выпуклой дискретной оптимизации // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1990. № 3. С. 35–38.
51. Ковалев М. М., Писарук Н. Н. Независимые потоки и полиматроиды // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1984. № 2. С. 41–43 / См. развернутый вариант: Kovalev M., Pisaruk N. Independent flows with discrete concave expenditure function // USSR Comput. Math. Phys. 1985. 25. № 3. P. 72–81.
52. Ковалев М. М., Кочкаров А. М. Дискретное гиперболическое программирование // Мат. модели и методы оптимального планирования. Мн.: НИИЭМП, 1980. С. 50–55.
53. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Мн.: Университетское, 1987.
54. Горуневич С. А., Ковалев М. М. Перестановочные полиматроиды // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1980. № 6. С. 9–14.

55. Ковалев М. М., Васильков Д. М. Оптимальность гриди-решений и канонические порядки // Докл. АН Беларуси. 1994. 38. № 5. С. 19–22. См. также: *Girlich E., Kovalev M., Vasilkov D.* Greedy sets and related problems // Eur. J. Oper. Res. 1997. 101. № 1. P. 74–80; *Kovalev M. M., Vasilkov D. M.* The canonical order and greedy algorithms // European J. Oper. Res. 1995. 80. P. 446–450.
56. *Girlich E., Kovalev M.* Classification of Polyhedral Matroids // Math. Meth. of Oper. Res. 1996. 43. P. 143–159.
57. *Bolotaschvili G., Kovalev M., Girlich E.* New facets of the Linear Ordering Polytope // SIAM J. Discr. Math. 1999. V. 12. № 3. P. 326–336.
58. Ковалев М. М., Нехорошева Л. Н. Новые инновационные структуры // Вестн. БГЭУ. № 1. 1995. С. 54–69.
59. Ковалев М. М., Курбацкий А. Н., Листонад Н. И. Экспертная система анализа тендерных предложений компьютерного оборудования и софтвера // Информатизация адукацыі. 1997. № 1. С. 68–92.
60. Ковалев М. М., Шибeko И. Т. Методики расчета банковских рейтингов // Банкаўскі весн. 1999. № 6. С. 30–39.
61. Горбач А. В., Ковалев М. М. Как определяются международные рейтинги государств // Вестн. Ассоц. бел. банков. 2000. № 33.
62. Козулин А. В., Ковалев М. М. Рейтинги университетов // Бел. банк. бюл. 2001. № 23. С. 18–38.
63. Ковалев М. М., Новик В. В. Рейтинги автоматизированных банковских систем // Банк. бюл. 1997. № 37. С. 30–41.
64. Ковалев М. М. Программный метод в управлении предприятием с дискретным производством // Вопросы совершенствования планирования народного хозяйства. Мн.: НИИЭМП при Госплане БССР, 1973.
65. *Emelicev V., Perepeliza V.* Complentary of Vector Optimisation Problems on Grapfs // Optimisatization. 1991. 22. P. 903–918.
66. *Girlich E., Kovalev M., Kravzov M.* K-Summen und k-Product-Bottleneck-Vectoroptimierungs probleme. TU Magdeburg. 1995. № 20.
67. Бердышева Р. А., Емеличев В. А. Устойчивость линейных задач лексикографической оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 4. С. 83–88.
68. Гирлих Э., Ковалев М. М., Кравцов М. К., Янушкевич О. А. Условия разрешимости векторных задач с помощью линейной свертки критериев // Кибернетика и системный анализ. 1998. № 1. С. 81–95. См. также: On conditions of solvability of combinatorial multicriteria optimization by linear convolution of criteria. Otto-von-Guericke-Universitdt. Magdeburg. 1996. № 26.
69. Гирлих Э., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Стабильность, устойчивость и квазиустойчивость многокритериальной задачи на системе подмножеств // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 6.
70. Писарук Н. Н., Редди С. К. Матричные игры с зависимыми стратегиями // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1991. С. 44–47.
71. *Pisaruk N.* Mean cost cyclical game // Math. of Oper. Res. 1999. V. 24. № 4. P. 817–823.
72. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Гирлих Э. Некоторые математические вопросы оптимальной стандартизации // 18. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau. 1973.
73. *Kovaljov M., Girlich F.* Zum Problem der optimalen Standartisierung // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization. 1977. 8. № 1. S. 89–103.

74. *Girlich E., Kowaljow M.* Zur mathematischen Theorie der optimalen Standartisierung // *Math. Operations und Statist.* 1980. II. № 3. S. 547–561; Eine Problemklasse der nichtlinearen diskreten Optimierung // *Wiss. Z. Friedrich Schiller- Univ. Jena.* 1980. 29. S. 327–338.
75. *Ковалев М. М., Топчишвили Л.* Несобственные задачи выпуклой дискретной оптимизации // *Вестник БГУ. Сер. 1.* 1991. № 1. С. 39–41.
76. *Воробьев М. А., Ковалев М. М., Наумович Н. А.* Системы программного обеспечения решения задач оптимального планирования. М.: ЦЭМИ, 1990.
77. *Ковалев М. М., Тарновский А. Г.* Эффективность градиентных алгоритмов раскроя // *Комбинационно-алгебраические вероятностные методы дискретного анализа.* Нижний Новгород, 1991. См. также: *Girlich E., Kovalev M., Zaporozhets A.* Planning of rectangle materials cutting on a 2-guillotine. *Otto-von-Guericke Universität Magdeburg.* 1994. № 22.
78. *Hoppe V., Kovalev M.* Zu einigen Problemen der Reihenfolgeoptimierung der operativen Steuerung in FMS (flexible manufactory systems) // *Optimization* 1990. 21. № 1. S. 109–121.
79. *Hoppe V., Kovalev M.* Zur Stabilisierung des Ressourcenverbrauchs für zyklische Reihenfolgeprobleme // *Operation Research Spektrum.* 1994. 16. P. 203–210.
80. *Пирьянович В. А., Ковалев М. М., Федулов Л. В., Кудрявцев П. Д.* Оптимизация отгрузки руды с горных участков на калийном руднике // *Изв. вузов (Горный журнал).* 1977. № 5.
81. *Girlich E., Kotov V., Kovalev M.* Semi on-line algorithm for multiprocessor Scheduling Problem with a given total Processing time // *Otto-von-Guericke Universität Magdeburg.* 1998. № 5.
82. *Ковалев М. М., Пирьянович В. А.* Локально-стохастические алгоритмы дискретной оптимизации // *Кибернетика.* 1982. № 1 С. 100-104.
83. *Вальк М., Гирлих Э., Ковалев М.* Проблемы оптимального проектирования систем. Институт технической кибернетики АН БССР.
84. *Fedulow L., Kowaljow M., Lyska W., Schoch M.* Ein Modell für die Reparaturzeitplanung von Bergbaumaschinen // *Bergbautechnik.* 1982. № 6. S. 342–343.
85. *Ковалев М. М., Листонад Н. И.* Модели оптимальной комплектации компьютерного оборудования // *Докл. АН НАН Беларуси.* 2000. Т. 44. № 6. С. 104–107.
86. *Емеличев В. А., Микульский В. Е.* Получение экономически обоснованного решения динамической модели межотраслевого баланса за счет вариации основных фондов // *Автоматизированные системы план. расчетов в респ. плановых органах.* Мн., 1977. Вып. 9.
87. *Приходченко О. И., Кравцов М. К.* Об одном методе получения экономически обоснованных решений системы межотраслевых уравнений // *Мат. модели и методы в автоматизиров. системах.* Мн., 1975.
88. *Воробьев М. А., Ковалев М. М.* Метод декомпозиции Данцига-Вулфа для задач с полиматроидными ограничениями // *Весці АН Беларусі.* 1992. № 5–6. С. 37–39.
89. *Ковалев М. М.* Белорусские реформы: денежно-кредитная политика переходного периода // *Финансовый анализ.* 1997. №2–3.
90. *Кавалеў М. М., Пісарук М. М.* Сучаснае лінейнае праграмаванне. Мн.: БГУ, 1998.
91. *Hoppe V., Kovalev M.* Wirtschaftsmathematik Bestimmung optimalen Lösungen mit PC. TU Ilmenau. 1995.