

- Калі для матрыцы A існуюць дзельнікі нуля, псеўдаадваротная матрыца A^+ вызначаецца не адзіным чынам, а з дакладнасцю да дзельнікаў нуля. Гэта значыць, што $A^+ + A^0$ і $A^+ + {}^0A$ таксама з'яўляюцца псеўдаадваротнымі для матрыцы A . У сваю чаргу найлепшае набліжанае рашэнне сістэмы (1) таксама вызначаецца не адзіным чынам.

Літаратура

3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Моск. ФИЗМАТЛИТ, 2004. 5-е изд.

ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО-ДУГУНДЖИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ФИЛЬТРАЦИЯМИ

З. Н. Силаева

Целью статьи является обобщение на категорию пространств с фильтрациями известной теоремы Куратовского-Дугунджи о продолжении отображения в метрическое пространство, удовлетворяющее свойству локальной связности. Теорема, которая будет доказана в статье, дает достаточные условия существования глобального продолжения отображений, сохраняющих фильтрации пространств (α -отображений). На ее основе может быть доказана теорема о существовании окрестностного продолжения α -отображений, а также характеристическая теорема для конечномерных α -ANE-пространств.

Определение. Пусть Y – α -пространство с фильтрацией $\{Y_i\}$. Будем говорить, что фильтрация $\{Y_i\} \in \text{equi} - \text{LC}^n$, если для любой точки $y \in Y$ и любой ее окрестности $U(y)$ существует окрестность $V(y) \subset U(y)$, такая, что любое непрерывное отображение $\varphi : S^k \rightarrow Y_m \cap V$, $k=0,1,\dots,n$, непрерывно продолжается до отображения $\bar{\varphi} : B^{k+1} \rightarrow Y_m \cap U$.

Если в этом определении $U(y) = N_\varepsilon(y)$, а $V(y) = N_{\varepsilon_1}(y)$, то будем писать $\varepsilon_1 = \text{equi} - \text{LC}_Y^n(\varepsilon)$. Отметим, что $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Теорема. Пусть X – метрическое α -пространство, A – замкнутое α -подпространство X , $\dim(X \setminus A) \leq n+1$, Y – метрическое α -пространство, фильтрация которого удовлетворяет условиям

1) $\{Y_i\} \in \text{equi} - \text{LC}^n$ и

2) для любого натурального i , $Y_i \in \text{LC}^n$, $n \geq 0$.

Тогда всякое α -отображение $f : A \rightarrow Y$ имеет α -продолжение $\bar{f} : X \rightarrow Y$.

Доказательство. Так как $\dim(X \setminus A) \leq n + 1$, то существует такое примыкающее локально-конечное покрытие $\mathbf{G} = \{G_\mu\}$, $\mu \in M$ множества $X \setminus A$, что каждая точка $x \in X \setminus A$ принадлежит не более чем $n + 2$ множествам G_μ . Пусть N – нерв этого покрытия. Это политоп, наделенный слабой топологией, с триангуляцией, образованной всеми симплексами вида $\sigma(G_{\mu_0}, G_{\mu_1}, \dots, G_{\mu_k})$, где $\bigcap_{i=0}^k G_{\mu_i} \neq \emptyset$. Следовательно, $\dim \sigma \leq n + 1$ для всех σ из триангуляции.

Определение. Будем говорить, что симплекс $\sigma = \langle G_{\mu_0}, G_{\mu_1}, \dots, G_{\mu_k} \rangle$ содержится в окрестности V , если $\bigcup_{i=0}^k G_{\mu_i} \subset V$. Будем говорить, что σ пересекает окрестность V , если $(\bigcup_{i=0}^k G_{\mu_i}) \cap V \neq \emptyset$.

Из того факта, что покрытие $\mathbf{G}$ примыкающее, несложно выводится

Лемма 1. Пусть $a \in A \cap (\overline{X \setminus A})$. Тогда для любой окрестности U точки a существует окрестность V точки a , такая, что для любого симплекса σ , пересекающего V , σ содержится в U .

Введем фильтрацию на нерве N . Для этого необходимо ввести понятия степени симплекса и степени точки нерва.

Определение. Пусть $\sigma = \langle G_0, \dots, G_k \rangle$. Тогда $\deg \sigma = \deg (\bigcap_{i=1}^k G_i)$. Число $\deg z = \min \{ \deg \sigma \mid \forall \sigma, \sigma \ni z \}$ будем называть степенью точки z нерва N . i -ым элементом фильтрации нерва N для любого натурального i будем называть множество $N_i = \{z \in N \mid \deg z \leq i\}$.

Лемма 2. Каноническое отображение $\varphi: X \setminus A \rightarrow N$ пространства в нерв его покрытия является φ -отображением.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{\langle G_{\mu_i} \rangle\}$ сходится к точке $a \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное n , такое, что для всех $i \geq n$, G_{μ_i} содержится в окрестности $N_\varepsilon(a)$.

Мы рассмотрим только случай, когда $A_1 \neq \emptyset$. Случай $A_1 = \emptyset$ к нему несложно сводится.

Лемма 3. Существует φ -отображение, которое ставит в соответствие каждой вершине $\langle G_\mu \rangle$ точку $a_\mu \in A$, так, что если $\{\langle G_{\mu_i} \rangle\}$ сходится к точке $a \in A$, то $\{a_{\mu_i}\} \rightarrow a$.

Замечание. Для того, чтобы построить такое φ -отображение, нужно поставить в соответствие каждой вершине $\langle G_\mu \rangle$ триангуляции точку $a_\mu \in A_{\deg G_\mu}$, так, чтобы $\rho(a_\mu, G_\mu \cap X_{\deg G_\mu}) < 2 \sup_{x \in G_\mu \cap X_{\deg G_\mu}} \rho(x, A_{\deg G_\mu})$.

Пусть α -отображение $g: N^{(0)} \rightarrow A$ удовлетворяет лемме 3. Т.к. $f: A \rightarrow Y$ непрерывно, то из $\{a_{\mu_i}\} \rightarrow a$ следует $\{f(a_{\mu_i})\} \rightarrow f(a)$. Тогда α -отображение $f_0 = f \circ g: N^{(0)} \rightarrow Y$ ставит в соответствие каждой вершине $\langle G_{\mu} \rangle \in N^{(0)}$ точку $f(a_{\mu}) \in Y$. При этом, как уже отмечено, из $\{\langle G_{\mu_i} \rangle\} \rightarrow a$ следует $\{f(a_{\mu_i})\} \rightarrow f(a)$.

Пусть $N^{(k)}$ – k -мерный остов полиэдра N , где $k=0,1,\dots,n+1$. Конечно, т.к. каждый $Y_i \in C^n$, любое α -отображение $f_k: N^{(k)} \rightarrow Y$ может быть продолжено до α -отображения $f_{k+1}: N^{(k+1)} \rightarrow Y$. Но нас будет интересовать в некотором смысле **оптимальный способ продолжения**.

Лемма 4. Всякое α -отображение $f_k: N^{(k)} \rightarrow Y$ можно продолжить до α -отображения $f_{k+1}: N^{(k+1)} \rightarrow Y$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \langle G_0, \dots, G_{k+1} \rangle \subset N^{(k+1)}$. Т.к. α -отображение f_k задано на границе $\sigma^\bullet$, то для $x \in \sigma^\bullet \subset \sigma$, $f_k(x) \subset Y_{\deg x} \subset Y_{\deg \sigma}$. Поэтому $f_k(\sigma^\bullet) \subset Y_{\deg \sigma}$, которое принадлежит C^n по условию, следовательно, существует отображение из σ в $Y_{\deg \sigma}$, являющееся непрерывным продолжением ограничения f_k на $\sigma^\bullet$. Ясно, что это α -отображение.

Пусть ε_σ – точная нижняя грань диаметров множеств значений всех таких продолжений. Выберем среди них "оптимальное" продолжение, диаметр которого не превышает числа $2\varepsilon_\sigma$. Т.о., построено α -отображение $f_{k+1}: N^{(k+1)} \rightarrow Y$ с $\text{diam}[f_{k+1}(\sigma)] \leq 2\varepsilon_\sigma$, и лемма доказана.

Теперь применим алгоритм оптимального продолжения, описанный в лемме 4, к α -отображению f_0 и построим последовательно α -отображения $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$. Важным является то, что для $k=0,1,\dots,n+1$ все они удовлетворяют следующему **свойству (АС) $_k^*$** :

Для любой точки $a \in A \cap \overline{X \setminus A}$ и для любой окрестности $N_\varepsilon(f(a))$ существует окрестность $N_\delta(a) \subset X$, такая, что для любого $\sigma = \langle G_{\mu_0}, \dots, G_{\mu_k} \rangle \subset N_\delta(a)$ выполняется $f_k(\sigma) \subset N_\varepsilon(f(a))$.

Лемма 5. Для $k=0, 1, \dots, n+1$ справедливо свойство (АС) $_k$.

Доказательство. Докажем лемму с помощью индукции по k . Свойство (АС) $_0$ непосредственно следует из леммы 3 и непрерывности отображения f в точке a . Предположим теперь, что свойство (АС) $_k$ верно, и докажем свойство (АС) $_{k+1}$.

*АС – англ. almost continuous – почти непрерывный

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_1 = \text{equi} - \text{LC}_Y^n(\varepsilon/5)$. Пусть $N_\delta(a)$ – окрестность, полученная для окрестности $N_{\varepsilon_1}(f(a))$ по свойству $(AC)_k$. Тогда $N_\delta(a)$ – искомая.

Действительно, для любого $\sigma = \langle G_{\mu_0}, \dots, G_{\mu_{k+1}} \rangle \subset N_\delta(a)$ выполняется $\sigma^\bullet \subset N_\delta(a)$. Тогда, по свойству $(AC)_k$, $f_k(\sigma^\bullet) \subset N_{\varepsilon_1}(f(a))$. Т.к. $\varepsilon_1 = \text{equi} - \text{LC}_Y^n(\varepsilon/5)$, то окрестность $N_{\varepsilon_1}(f(a))$ такова, что непрерывное отображение $f_k : \sigma^\bullet \rightarrow Y_m \cap N_{\varepsilon_1}(f(a))$ непрерывно продолжается до отображения $\sigma \rightarrow Y_m \cap N_{\varepsilon/5}(f(a))$. Из последнего следует, что диаметры множеств значений всех таких продолжений отображения f_k меньше $2\varepsilon/5$. В силу оптимальности f_{k+1} , $\text{diam}[f_{k+1}(\sigma)] < 4\varepsilon/5$, и, следовательно, $f_{k+1}(\sigma) \subset N_{\varepsilon_1+4\varepsilon/5}(f(a)) \subset N_\varepsilon(f(a))$. Свойство $(AC)_{k+1}$ доказано, и лемма доказана полностью.

Определим теперь отображение $\bar{f} : X \rightarrow Y$ так:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ f_{n+1} \circ \varphi(x), & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

где $\varphi(x) : X \setminus A \rightarrow N$ – каноническое ε -отображение. Ясно, что $\bar{f}$ сохраняет фильтрацию. Для доказательства того, что $\bar{f}$ есть ε -отображение, осталось доказать его непрерывность в точке $a \in A \cap \overline{X \setminus A}$.

Лемма 6. Отображение $\bar{f}$ непрерывно в точке $a \in A \cap \overline{X \setminus A}$.

Доказательство. Выберем произвольную окрестность $N_\varepsilon(f(a))$. В силу леммы 5, выполняется свойство $(AC)_{n+1}$, поэтому существует такая $N_{\delta_1}(a) \subset X$, что для любого $\sigma = \langle G_{\mu_0}, G_{\mu_1}, \dots, G_{\mu_{n+1}} \rangle \subset N_{\delta_1}(a)$ выполняется $f_{n+1}(\sigma) \subset N_\varepsilon(f(a))$. Пусть $N_{\delta_2}(a) \subset X$ – окрестность, полученная из $N_\varepsilon(f(a))$ по непрерывности f в точке a и пусть δ – радиус окрестности, полученной из $N_{\delta_1}(a)$ по лемме 1. Нетрудно доказать, что окрестность $N_{\min\{\delta, \delta_2\}}(a)$ – искомая. Непрерывность $\bar{f}$ в точке a доказана. Теорема доказана полностью.

Литература

1. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.
2. Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М., 1977.