если операторы $B_i(t),\ i=1,2,$ ограничены в H и $B(t)$ подчинены операторам $A^{1/2}(t)$, т.е. $|B(t)w| \le c_8 |A^{1/2}(t)w| \quad \forall w \in D(A(t)),\ c_8 > 0$.

Литература

1. *Бриш Н.И., Юрчук Н.И.* Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №6. С. 1017-1030.
2. *Ломовцев Ф.Е.* Гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов // Докл. НАН РБ. 2001. Т.45, №1. с. .34-37.

ПСЕЎДААДВАРОТНЫЯ МАТРЫЦЫ І ІХ ПРЫМЯНЕННІ

Д. А. Навічкова

Няхай A – рэчаісная матрыца памеру $\infty\times\infty$. Па аналогіі з [1] рэчаісную матрыцу A^+ памеру $\infty\times\infty$ назавем псеўдаадваротнай да матрыцы A, калі выконваюцца роўнасці:

$$AA^+A = A$$
$$A^+ = UA^* = A^*V\ ,$$

дзе U і V–некаторыя рэчаісныя матрыцы памеру $\infty\times\infty$.

Няхай A – рэчаісная матрыца памеру $\infty\times\infty$, канечнага рангу n, слупкі якой належаць l_2. Разгледзім шкілетавы расклад матрыцы A у здабытак матрыц B і C, якія маюць памеры $\infty\times n$ і $n\times\infty$ адпаведна:

$$A = BC = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk}\cdots \end{pmatrix},$$

прычым слупкамі матрыцы B з’яўляюцца любыя n лінейна незалежных слупкоў матрыцы A ці любыя n лінейна незалежных слупкоў, праз якія лінейна выражаюцца слупкі матрыцы A. Тады адвольны j-ы слупок матрыцы A будзе лінейнай камбінацыяй слупкоў матрыцы B з каэфіцыентамі $c_{1j},\ c_{2j},\ \ldots\ ,\ c_{nj}$.Гэтыя каэфіцыенты і ўтвараюць j-ы слупок матрыцы C (j=1, 2, ...). Прычым радкі матрыцы C павінны належаць l_2. Неабходна, каб det(B^*B)≠0 і det(CC^*)≠0. Псеўдаадваротныя матрыцы B^+ і C^+ для матрыц B і C адпаведна вызначаюцца наступным чынам:

$$B^{+} = (B^{*}B)^{-1}B^{*}$$
$$C^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}.$$

Тады для матрыцы A існуе псеўдаадваротная матрыца A^{+}, якая вызначаецца па формуле:

$$A^{+} = C^{+}B^{+} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}.$$

Пры гэтым існаванне элементаў вышэйпрыведзеных матрыц забяспечваецца прыналежнасцю слупкоў матрыцы B і радкоў матрыцы C да l_2.

Разгледзім адвольную сістэму лінейных раўнанняў у матрычным выглядзе:

$Ax = y$,(1)

дзе A=(a_{ij}) – рэчаісная матрыца памеру $\infty\times\infty$, канечнага рангу n, слупкі якой належаць l_2. Рашэнне дадзенай сістэмы шукаем у l_2. Пазначым

$$x^{T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \end{pmatrix},\ y^{T} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k & \cdots \end{pmatrix}.$$

Слупок

$$x^{0} = \begin{pmatrix} x_1^{0} \\ x_2^{0} \\ \cdots \\ x_k^{0} \\ \cdots \end{pmatrix}$$

завецца найлепшым набліжаным рашэннем сістэмы (1), калі пры

$$x_1 = x_1^{0},\ x_2 = x_2^{0}, \ldots, x_k = x_k^{0}, \ldots$$

«квадратовае адхіленне»

$$|\, y - Ax\,|^{2} = \sum_{i=1}^{\infty} |\, y_i - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\,|^{2}$$

дасягае свайго найменшага значэння і сярод усіх слупкоў x, для якіх гэта адхіленне мае мінімальнае значэнне, слупок x^{0} мае найменшую «даўжыню», г.зн. для гэтага слупка велічыня

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

мае найменшае значэнне.

Тэарэма. Калі матрыца A задавальняе ўсім вышэйазначаным умовам для існавання псеўдаадваротнай матрыцы A^+, то найлепшае набліжанае рашэнне сістэмы (1) можна знайсці па формуле:

$$x^0 = A^+ y\,,(2)$$

дзе A^+ – псеўдаадваротная матрыца для матрыцы A.

Няхай рэчаісная матрыца A памерамі $\infty \times \infty$ мае блокавае ўяўленне:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{n\times n} & B_{n\times\infty} \\ C_{\infty\times n} & D_{\infty\times\infty} \end{pmatrix},$$

дзе $\tilde{A}$ – квадратная незвыродная матрыца, ранг матрыцы A супадае з рангам матрыцы $\tilde{A}$, радкі матрыцы B і слупкі матрыцы C належаць l_2,

$$\det((\tilde{A} \quad B)(\tilde{A} \quad B)^*) \neq 0,\ \det(\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ C \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ C \end{pmatrix}) \neq 0.$$

Тады псеўдаадваротную матрыцу A^+ для матрыцы A можна знайсці па формуле:

$$A^+ = \begin{pmatrix} \tilde{A}^* \\ B^* \end{pmatrix} K(\tilde{A}^* \quad C^*),$$

дзе

$$K = (\tilde{A}\tilde{A}^* + BB^*)^{-1}\tilde{A}(\tilde{A}^*\tilde{A} + C^*C)^{-1}.$$

Існаванне элементаў гэтых матрыц забяспечваецца прыналежнасцю слупкоў матрыцы C і радкоў матрыцы B да l_2. Калі на матрыцу A удадатак накласці ўмову, што яе слупкі належаць l_2, то найлепшае набліжанае рашэнне сістэмы (1) можна таксама знайсці па формуле (2).

Заўвага.

- У агульным выпадку псеўдаадваротная матрыца A^+ не з’яўляецца левабаковай ці правабаковай адваротнай для матрыцы A, а менавіта:

$$A^+ \neq {}^{-1}A,\ A^+ \neq A^{-1}.$$

- Калі для матрыцы A існуюць дзельнікі нуля, псеўдаадваротная матрыца A^{+} вызначаецца не адзіным чынам, а з дакладнасцю да дзельнікаў нуля. Гэта значыць, што $A^{+}+A^{0}$ і $A^{+}+{}^{0}A$ таксама з'яўляюцца псеўдаадваротнымі для матрыцы A. У сваю чаргу найлепшае набліжанае рашэнне сістэмы (1) таксама вызначаецца не адзіным чынам.

Літаратура

3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Моск. ФИЗМАТЛИТ, 2004. 5-е изд.

ТЕОРЕМА КУРАТОВСКОГО-ДУГУНДЖИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С ФИЛЬТРАЦИЯМИ

З. Н. Силаева

Целью статьи является обобщение на категорию пространств с фильтрациями известной теоремы Куратовского-Дугунджи о продолжении отображения в метрическое пространство, удовлетворяющее свойству локальной связности. Теорема, которая будет доказана в статье, дает достаточные условия существования глобального продолжения отображений, сохраняющих фильтрации пространств (-отображений). На ее основе может быть доказана теорема о существовании окрестностного продолжения -отображений, а также характеризационная теорема для конечномерных -ANE-пространств.

Определение. Пусть Y – -пространство с фильтрацией $\{Y_{\mathrm{i}}\}$. Будем говорить, что фильтрация $\{Y_i\}\in \mathrm{equi}-\mathrm{LC}^n$, если для любой точки $y\in Y$ и любой ее окрестности $U(y)$ существует окрестность $V(y)\subset U(y)$, такая, что любое непрерывное отображение $\varphi : S^k \to Y_m \cap V$, k=0,1,…,n, непрерывно продолжается до отображения $\overline{\varphi} : B^{k+1} \to Y_m \cap U$.

Если в этом определении $U(y)=N_{\varepsilon}(y)$, а $V(y)=N_{\varepsilon_1}(y)$, то будем писать $\varepsilon_1 = \mathrm{equi}-\mathrm{LC}^n_Y(\varepsilon)$. Отметим, что $\varepsilon_1<\varepsilon$.

Теорема. Пусть X – метрическое -пространство, A – замкнутое -подпространство X, $\dim(X \setminus A)\le n+1$, Y – метрическое -пространство, фильтрация которого удовлетворяет условиям

1) $\{Y_i\}\in \mathrm{equi}-\mathrm{LC}^n$ и

2) для любого натурального i, $Y_i \in \mathrm{C}^n$, $n\ge 0$.

Тогда всякое -отображение $f : A\to Y$ имеет -продолжение $\bar{f} : X \to Y$.