ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ПОЛНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

А. В. Мотевич

Задача Гурса для неполного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с постоянными областями определения изучалась в [1]. В данной работе выведено энергетическое неравенство сильных решений задачи Гурса в случае полных уравнений и переменных областей определения операторных коэффициентов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Im =]0,T_1[\times]0,T_2[$ – ограниченный прямоугольник на плоскости R^2 переменных $t=\{t_1,t_2\}$ и H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Рассмотрим в $\Im$ уравнение

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + A_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1} + A_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2} + A(t)u = f(t), \tag{1}$$

с условиями Гурса

$$l_1 u \equiv u|_{t_2=0} = \varphi_1(t_1), \qquad l_2 u \equiv u|_{t_1=0} = \varphi_2(t_2), \tag{2}$$

где φ_1 и φ_2 – функции соответственно переменных $t_1 \in]0,T_1[$ и $t_2 \in]0,T_2[$ со значениями в H, удовлетворяющие условию согласования

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0). \tag{3}$$

Здесь u и f – функции двумерной переменной t со значениями в H, $A(t)$, $A_i(t)$ – линейные, неограниченные операторы в H с зависящими от t соответственно областями определения $D(A(t))$, $D(A_i(t))$, $i=1,2$. Предполагается, что операторы этого уравнения удовлетворяют следующим условиям.

I. При каждом $t \in \Im$ операторы $A(t)$ на $D(A(t))$ самосопряжены и положительно определены в H.

II. В H при каждом $t \in \Im$ обратные операторы $A^{-1}(t) \in L_\infty(\Im, L(H))$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по t, имеют сильные частные производные $\partial A^{-1}(t)/\partial t_i \in L_\infty(\Im, L(H))$, $i=1,2$, такие, что

$$-\Big(\big(\partial A^{-1}(t)/\partial t_i\big)g,g\Big) \le c_2\Big(A^{-1}(t)g,g\Big) \quad \forall g\in H,\ c_2\ge 0,\ i=1,2. \qquad (4)$$

III. При каждом $t\in\Im$ операторы $A_i(t)$ подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ с областями определения $D(A^{1/2}(t))$ операторов $A(t)$, т.е. $|A_i(t)w|\le c_{i+2}|A^{1/2}(t)w|\ \forall w\in D(A^{1/2}(t)),\ c_{i+2}>0,\ i=1,2$, и для них имеет место оценка

$$-\mathrm{Re}\big((A_1(t)v_1+A_2(t)v_2,v_1+v_2)\big)\le c_5(|v_1|^2+|v_2|^2)\ \forall v_1,v_2\in H,\ c_5\ge 0. \quad (5)$$

Выведем энергетическое неравенство решений этой задачи Гурса.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Задаче Гурса (1) – (3) соответствует линейный неограниченный оператор $L=\{\mathsf{L}(t),l_1,l_2\}:E\supset D(L)\to F$, действующий из гильбертова пространства E, полученного замыканием множества

$$D(L)=\Big\{u\in \mathcal{H}=L_2(\Im,H):u(t)\in D(A(t)),t\in\Im;\ \frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_i},A_i(t)\frac{\partial u}{\partial t_i},A(t)\in\mathcal{H},\ i=1,2\Big\}$$ по

эрмитовой норме $$\|u\|_E=\left[\int_{\Im}\sum_{i=1}^{2}(T_i-t_i)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+|A^{1/2}(t)u|^2\right)dt\right]^{1/2},$$

в банахово пространство $F=\mathcal{H}_\gamma\times H_1\times H_2$ всех элементов $\Phi=\{f,\varphi_1,\varphi_2\}$ с нормой $\|\Phi\|_F=(\|f(t)\|_\gamma^2+\|\varphi_1\|_1^2+\|\varphi_2\|_2^2)^{1/2}$. Здесь банаховы пространства $\mathcal{H}_\gamma$ – замыкание множества $\mathcal{H}$ по норме

$$\|f(t)\|_\gamma=\left(\int_{\Im}\gamma(t)|f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$$ и H_i – замыкания множеств

$$\{u\in D(L):u(t)\big|_{t_j=0}=0\}$$ по нормам

$$\|u\|_i=\left(\int_0^{T_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2+|A^{1/2}(t)u|^2\right)\Bigg|_{t_j=0}dt_i\right)^{1/2},\quad j\ne i,\ i=1,2.$$

Стандартным образом доказывается, что в предположении условия I и плотности множества

$$D^*(L)=\{u\in D(L): u(t)\in D(A_i^*(t)), t\in\Im, i=1,2\},$$

где $A_i^*(t)$ – сопряженные операторы операторов $A_i(t)$ в H, в $\mathcal{H}$ оператор L допускает замыкание $\overline{L}=\{\overline{\mathsf{L}(t)}, l_1, l_2\}: E\supset D(\overline{L})\to F$.

Решения $u\in D(\overline{L})$ операторного уравнения $\overline{L}u=\Phi$, $\Phi=(f,\varphi_1,\varphi_2)\in F$, называются <u>сильными решениями</u> задачи Гурса (1)–(3).

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Теорема. Пусть выполняются условия I – III и множество $D^*(L)$ плотно в $\mathcal{H}$. Тогда существует постоянная $c_6>0$ такая, что

$$\|u\|_E^2\le c_6\|\overline{L}\,u\|_F^2 \qquad \forall u\in D(\overline{L}). \tag{6}$$

Доказательство. Умножаем (1) скалярно в $\mathcal{H}$ на $e^{\theta(t)}\gamma(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)$, где $\gamma(t)=(T_1-t_1)(T_2-t_2)$, $\theta(t)=c(\tau_1-t_1+\tau_2-t_2)$, $c\ge 0$, и получаем

$$\int_\Im\left(\mathcal{L}(t)u, e^\theta\gamma(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\right)dt=\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt+$$

$$\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left(A(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)dt+\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left(A(t)u,\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt+$$

$$+\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left(A_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1}+A_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt \quad \forall u\in D(L). \tag{7}$$

В первых двух интегралах правой части (7) интегрируем по частям

$$\text{по } t_i \ \int_\Im e^\theta(T_i-t_i)\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}^2\right|dt=\ 2\operatorname{Re}\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1\partial t_2},\frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt+$$

$$+T_j\int_0^{T_i}e^\theta(T_i-t_i)\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2\Bigg|_{t_j=0}dt_i-c\int_\Im e^\theta\gamma(t)\left|\frac{\partial u}{\partial t_i}\right|^2dt,\ j\ne i,\ i=1,2.$$

Для следующих двух интегралов правой части (7) применяются сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon>0$, со значениями в

$D(A(t))$ и следующими свойствами из [2]: 1). $|A_\varepsilon^{-1}(t)v - v| \to 0 \ \forall v \in H$ при $\varepsilon \to 0$; 2). Сильные производные $\partial A_\varepsilon^{-1}(t) / \partial t_i \in L_\infty(H, \mathrm{L}(H))$, $\varepsilon > 0$, и $\partial A_\varepsilon^{-1}(t)/\partial t_i = \varepsilon A(t) A_\varepsilon^{-1}(t) \partial A(t)^{-1}/\partial t_i A(t) A_\varepsilon^{-1}(t), \quad i = 1,2.$

Интегрируя один раз по t_i и применяя оценку (4), находим

$$\int_{\Im} e^{\theta}(T_j - t_j)\Big(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u\Big)dt \le 2\operatorname{Re}\int_{\Im} e^{\theta}\gamma(t)\left(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt +$$

$$+T_i\int_0^{T_j} e^{\theta}(T_j - t_j)\Big(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u\Big)\Big|_{t_i=0} dt_j + \big(c_2 - c\big)\int_{\Im} e^{\theta}\gamma(t)\Big(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)u, u\Big)dt.$$

Устремляем здесь $\varepsilon \to 0$ и приходим к неравенствам

$$\int_{\Im} e^{\theta}(T_j - t_j)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt \le 2\operatorname{Re}\int_{\Im} e^{\theta}\gamma(t)\left(A(t)u, \frac{\partial u}{\partial t_i}\right)dt +$$

$$+T_i\int_0^{T_j} e^{\theta}(T_j - t_j)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\Big|_{t_i=0} dt_j + \big(c_2 - c\big)\int_{\Im} e^{\theta}\gamma(t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2 dt,\ j \ne i,\ i = 1, 2.$$ В

силу оценки (5) последний интеграл правой части (7) удовлетворяет неравенству

$$-\operatorname{Re}\int_{\Im} e^{\theta}\gamma(t)\left(A_1(t)\frac{\partial u}{\partial t_1} + A_2(t)\frac{\partial u}{\partial t_2}, \frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt \le c_5\int_{\Im} e^{\theta}\gamma(t)\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t_2}\right|^2\right)dt.$$

Складывая полученные выражения для интегралов правой части равенства (7) и применяя неравенство Коши-Буняковского и элементарные оценки, получаем неравенство (6) для гладких решений $u \in D(L)$ задачи Гурса с постоянной $c_6 = e^{c_7(T_1+T_2)}\max\{T_1, T_2\}$, $c_7 = \max\{c_2,\, 2 + 2c_5\}$. Затем эта оценка предельным переходом распространяется на все сильные решения $u \in D(\overline{L})$.

Замечание. Утверждение теоремы 1 (возможно с большей постоянной c_7) имеет место для уравнений с младшей частью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} + \sum_{i=1}^{2} A_i(t)\frac{\partial u}{\partial t_i} + A(t)u + \sum_{i=1}^{2} B_i(t)\frac{\partial u}{\partial t_i} + B(t)u = f(t),$$

если операторы $B_i(t),\ i=1,2,$ ограничены в H и $B(t)$ подчинены операторам $A^{1/2}(t)$, т.е. $|B(t)w|\le c_8\,|A^{1/2}(t)w| \quad \forall w\in D(A(t)),\ c_8>0$.

Литература

1. *Бриш Н.И., Юрчук Н.И.* Задача Гурса для абстрактных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №6. С. 1017-1030.
2. *Ломовцев Ф.Е.* Гиперболические дифференциально-операторные уравнения второго порядка с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов // Докл. НАН РБ. 2001. Т.45, №1. с. .34-37.

ПСЕЎДААДВАРОТНЫЯ МАТРЫЦЫ І ІХ ПРЫМЯНЕННІ

Д. А. Навічкова

Няхай A – рэчаісная матрыца памеру $\infty\times\infty$. Па аналогіі з [1] рэчаісную матрыцу A^+ памеру $\infty\times\infty$ назавем псеўдаадваротнай да матрыцы A, калі выконваюцца роўнасці:

$$AA^+A=A$$
$$A^+=UA^*=A^*V\ ,$$

дзе U і V–некаторыя рэчаісныя матрыцы памеру $\infty\times\infty$.

Няхай A – рэчаісная матрыца памеру $\infty\times\infty$, канечнага рангу n, слупкі якой належаць l_2. Разгледзім шкілетавы расклад матрыцы A у здабытак матрыц B і C, якія маюць памеры $\infty\times n$ і $n\times\infty$ адпаведна:

$$A=BC=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk}\cdots \end{pmatrix},$$

прычым слупкамі матрыцы B з’яўляюцца любыя n лінейна незалежных слупкоў матрыцы A ці любыя n лінейна незалежных слупкоў, праз якія лінейна выражаюцца слупкі матрыцы A. Тады адвольны j-ы слупок матрыцы A будзе лінейнай камбінацыяй слупкоў матрыцы B з каэфіцыентамі c_{1j}, c_{2j}, ... , c_{nj}.Гэтыя каэфіцыенты і ўтвараюць j-ы слупок матрыцы C (j=1, 2, ...). Прычым радкі матрыцы C павінны належаць l_2. Неабходна, каб $\det(B^*B)\neq 0$ і $\det(CC^*)\neq 0$. Псеўдаадваротныя матрыцы B^+ і C^+ для матрыц B і C адпаведна вызначаюцца наступным чынам: