ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ СОСЕДНИМИ СОБЫТИЯМИ В МОДУЛИРОВАННОМ СИНХРОННОМ ПОТОКЕ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

М. Н. Сиротина, А. М. Горцев

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: mashuliagol@mail.ru, gam@fpml.tsu.ru

Рассматривается модулированный синхронный дважды стохастический поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени. После каждого зарегистрированного события наступает время фиксированной длительности, в течение которого другие события исходного модулированного синхронного потока недоступны наблюдению. По окончании длительности мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени и т.д. В работе получена формула плотности вероятностей значений длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке в условиях мертвого времени.

Ключевые слова: модулированный синхронный поток событий, мертвое время, плотность вероятностей значений длительности интервала между соседними событиями.

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели теории массового обслуживания широко применяются при описании реальных физических, технических и других процессов и систем. В связи с бурным развитием компьютерной техники и информационных технологий появилась важная сфера приложений теории массового обслуживания – проектирование и создание информационно-вычислительных сетей, компьютерных сетей связи, спутниковых сетей и телекоммуникационных сетей [1].

На практике интенсивность входящего потока событий изменяется со временем, при этом изменения часто носят случайный характер, последнее приводит к рассмотрению дважды стохастических потоков событий [2–6], одним из которых является модулированный синхронный дважды стохастический поток [7, 8].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается модулированный синхронный поток событий (далее поток), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями: λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в i-м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i, $i = 1, 2$. Если процесс $\lambda(t)$ в момент времени t находится в i-м состоянии, то на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$, где Δt − достаточно малая величина, с вероятностью $\alpha_i \Delta t + o(\Delta t)$ пребывание процесса $\lambda(t)$ в i-м состоянии закончится, и процесс $\lambda(t)$ с вероятностью, равной единице, перейдет из i-го состояния в j-е ($i, j = 1, 2$, $i \neq j$). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью $\lambda_i, i = 1,2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1; переход осуществляется с вероятностью p ($0 < p \leq 1$); с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое возможен также в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2; переход осуществляется с вероятностью q ($0 < q \leq 1$); с вероятностью $1-q$ процесс $\lambda(t)$ остается во втором состоянии. В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ − марковский процесс.

После каждого зарегистрированного в момент t_k события наступает время фиксированной длительности T (далее – мертвое время), в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. Рассматривается непродлевающееся мертвое время, то есть события, наступившие в течение интервала мертвого времени не вызывают его продления. По окончании длительности периода мертвого времени первое наступившее событие вновь генерирует период мертвого времени длительности T и т.д. Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где λ_1, λ_2 − состояния процесса $\lambda(t)$, $t_1, t_2, \ldots$ − моменты наступления наблюдаемых событий потока, штриховка – периоды мертвого времени длительности T, ось под номером 1 отображает исходный модулированный поток событий, под номером 2 – схему создания мертвого времени, под номером 3 – наблюдаемые события модулированного синхронного потока.

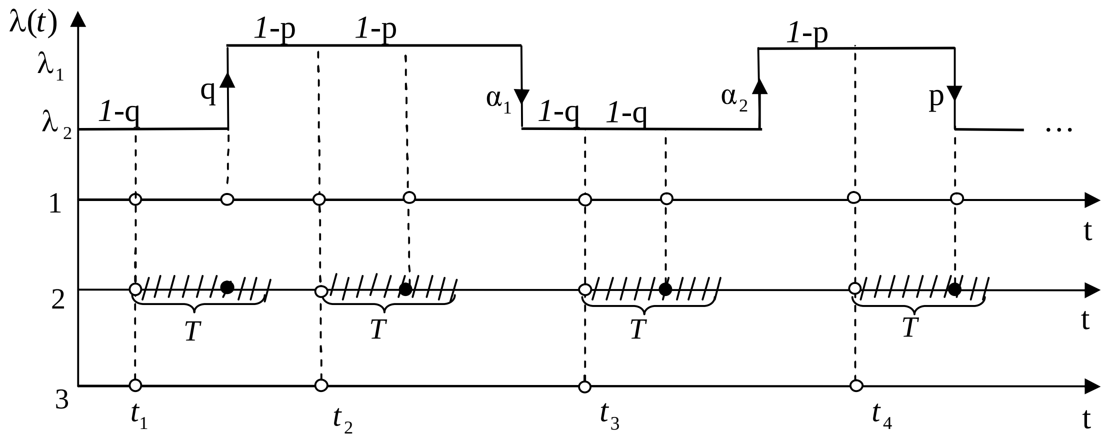

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

Матрицы инфинитезимальных коэффициентов потока примут вид:

$$D_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1 + \alpha_1) & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -(\lambda_2 + \alpha_2) \end{Vmatrix}, \quad D_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ q\lambda_2 & (1-q)\lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 − интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 − интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

2. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МОДУЛИРОВАННОГО СИНХРОННОГО ПОТОКА

Рассматривается стационарный режим функционирования потока. Последовательность моментов $t_1, t_2 ... t_k, ...$ наступления событий потока образуют вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, то есть поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента t_k.

Рассмотрим случай, когда мертвое время отсутствует, то есть $T = 0$. Пусть τ − значение случайной величины длительности интервала между моментами наступления двух соседних событий потока. Тогда плотность вероятностей значений длительности интервала между соседними событиями модулированного синхронного потока примет вид:

$$p(\tau) = \sum_{i=1}^{2} \pi_i(0) \sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij}(\tau), \tag{2.1}$$

где $\pi_i(0)$ − условная стационарная вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в i-ом состоянии при условии, что в момент времени $\tau = 0$ событие потока наступило, i = 1, 2 ($\pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$); $\tilde{p}_{ij}(\tau)$ − плотность вероятностей длительности интервала между двумя соседними событиями потока и вероятность того, что $\lambda(\tau) = \lambda_j$, при условии, что $\lambda(0) = \lambda_i$ (i, j = 1, 2).

Можно показать [10], что вероятности $\pi_i(0)$, i = 1, 2 примут вид:

$$\pi_1(0) = \frac{q\lambda_2(\lambda_1 + \alpha_1) + (1-p)\lambda_1\alpha_2}{(p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2}, \ \pi_2(0) = \frac{p\lambda_1(\lambda_1 + \alpha_2) + (1-q)\lambda_2\alpha_1}{(p+q)\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_1\alpha_2}. \tag{2.2}$$

Показано [9], что плотности $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, i = 1, 2 находятся в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{p}_{11}(\tau) = p_{11}(\tau)\lambda_1(1-p) + p_{12}(\tau)\lambda_2 q, \ \tilde{p}_{12}(\tau) = p_{11}(\tau)\lambda_1 p + p_{12}(\tau)\lambda_2(1-q), \\ &\tilde{p}_{22}(\tau) = p_{22}(\tau)\lambda_2(1-q) + p_{21}(\tau)\lambda_1 p, \ \tilde{p}_{21}(\tau) = p_{22}(\tau)\lambda_2 q + p_{21}(\tau)\lambda_1(1-p), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $p_{ij}(\tau)$ − переходная вероятность того, что на интервале $(0, \tau)$ нет событий потока и в момент времени τ имеет место $\lambda(\tau) = \lambda_j$, при условии, что в момент времени $\tau = 0$ значение процесса $\lambda(0) = \lambda_i$ (i, j = 1, 2).

Вероятности $p_{ij}(\tau)$ при этом запишутся в виде [9]

$$p_{11}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1}[(\lambda_2 + \alpha_2 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_2 + \alpha_2 - z_2)e^{-z_2\tau}], \ p_{12}(\tau) = \frac{\alpha_1}{z_2 - z_1}[e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}], \tag{2.4}$$

$$p_{22}(\tau) = \frac{1}{z_2 - z_1}[(\lambda_1 + \alpha_1 - z_1)e^{-z_1\tau} - (\lambda_1 + \alpha_1 - z_2)e^{-z_2\tau}], \ p_{21}(\tau) = \frac{\alpha_2}{z_2 - z_1}[e^{-z_1\tau} - e^{-z_2\tau}],$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \alpha_1 + \lambda_2 + \alpha_2) \mp \sqrt{(\lambda_1 + \alpha_1 - \lambda_2 - \alpha_2)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}.$$

Путем подстановки (2.4) в (2.3), затем (2.3) и (2.2) в (2.1), находится явный вид плотности $p(\tau)$ [9]:

$$p(\tau) = \gamma z_1 e^{-z_1\tau} + (1-\gamma) z_2 e^{-z_2\tau}, \tag{2.5}$$

где $\gamma = \frac{1}{z_2 - z_1}(z_2 - \pi_1(0)\lambda_1 - \pi_2(0)\lambda_2)$, $1 - \gamma = \frac{1}{z_2 - z_1}(-z_1 + \pi_1(0)\lambda_1 + \pi_2(0)\lambda_2)$,

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\alpha_1+\lambda_2+\alpha_2)\mp\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2+\alpha_1-\alpha_2)^2+4\alpha_1\alpha_2}\,.$$

3. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МОДУЛИРОВАННОГО СИНХРОННОГО ПОТОКА ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим случай, когда мертвое время $T\neq 0$. Пусть τ − значение случайной величины длительности интервала между моментами наступления двух соседних событий потока. Тогда плотность вероятностей значений длительности интервала между наступлениями соседних событий модулированного синхронного потока, функционирующего в условиях мертвого времени, запишется в виде

$$p_T(\tau)=\sum_{i=1}^{2}\pi_i(0\,|\,T)\sum_{j=1}^{2}q_{ij}(T)\sum_{k=1}^{2}\tilde{p}_{jk}(\tau-T),\ \tau\geq T, \tag{3.1}$$

где $\tilde{p}_{jk}(\tau-T)$ определена в (2.3); $q_{ij}(T)$ − вероятность того, что за время T процесс $\lambda(t)$ перешел из i-го состояния в j-ое, i, j =1, 2; $\pi_i(0\,|\,T)$ − условная стационарная вероятность того, что в момент $\tau=0$ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии i, событие потока наступило, и мертвое время наступило.

Тогда для введенных вероятностей $q_{ij}(\tau)$ имеет место система дифференциальных уравнений ($0\leq\tau\leq T$):

$$q_{11}'(\tau)=-(\alpha_1+p\lambda_1)q_{11}(\tau)+(\alpha_2+q\lambda_2)q_{12}(\tau), q_{12}'(\tau)=-(\alpha_2+q\lambda_2)q_{12}(\tau)+(\alpha_1+p\lambda_1)p_{11}(\tau),$$

$$q_{22}'(\tau)=-(\alpha_1+p\lambda_1)q_{21}(\tau)+(\alpha_2+q\lambda_2)q_{22}(\tau), p_{21}'(\tau)=-(\alpha_2+q\lambda_2)q_{22}(\tau)+(\alpha_1+p\lambda_1)q_{21}(\tau),$$

с граничными условиями:

$$q_{11}(0)=1,\ q_{12}(0)=0,\ q_{22}(0)=1,\ q_{21}(0)=0.$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений и в полученном решении полагая $\tau=T$, находим

$$q_{11}(T)=\frac{\alpha_2+q\lambda_2}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}+\frac{\alpha_1+p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T}, \tag{3.2}$$

$$q_{12}(T)=\frac{\alpha_1+p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}-\frac{\alpha_1+p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T},$$

$$q_{21}(T)=\frac{\alpha_2+q\lambda_2}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}-\frac{\alpha_2+q\lambda_2}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T},$$

$$q_{22}(T)=\frac{\alpha_1+p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}+\frac{\alpha_2+q\lambda_2}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T}.$$

Для нахождения вероятностей $\pi_i(0\,|\,T)$ из исходной формулы (3.1) введем π_{ij} − вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $\tau=0$ до наступления следующего события наблюдаемого потока и реализации розыгрыша состояния потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i в состояние j.

Относительно вероятностей π_{ij} можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\pi_{11}&=q_{11}(T)p_{11}+q_{12}(T)p_{21},\ \pi_{12}=q_{11}(T)p_{12}+q_{12}(T)p_{22},\\ \pi_{21}&=q_{21}(T)p_{11}+q_{22}(T)p_{21},\ \pi_{22}=q_{21}(T)p_{12}+q_{22}(T)p_{22},\end{aligned} \tag{3.3}$$

где p_{ij} – вероятность того, что в течение интервала между моментом времени $\tau = 0$ (момент наступления события) и моментом наступления следующего события процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния λ_i в состояние λ_j. Тогда $p_{ij} = \int_0^\infty p_{ij}(t)dt$.

Интегрируя полученные в (2.3) плотности вероятностей $\tilde{p}_{ij}(\tau)$, затем подставляя вероятности p_{ij} и вероятности $q_{ij}(T)$ из (3.2) в (3.3), получим выражения для вероятностей $\pi_{ij}(i, j = 1, 2)$:

$$
\begin{aligned}
\pi_{11} &= \frac{1}{z_1 z_2}((1-p)\lambda_1\alpha_2 + q\lambda_2(\lambda_1+\alpha_1) + (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})),\\
\pi_{12} &= \frac{1}{z_1 z_2}(p\lambda_1\alpha_2 + (1-q)\lambda_2(\lambda_1+\alpha_1) - (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})),\\
\pi_{21} &= \frac{1}{z_1 z_2}(q\lambda_2\alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2) - (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})),\\
\pi_{22} &= \frac{1}{z_1 z_2}((1-q)\lambda_2\alpha_1 + p\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2) + (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где $z_1 z_2$ определены в (2.4), π_i − априорная вероятность того, что в момент времени начала наблюдения за потоком, он находится в *i*-ом состоянии [8].

Для вероятностей $\pi_i(0|T)\,(i, j = 1, 2)$ имеет место система линейных уравнений

$$\pi_1(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{11} + \pi_2(0|T)\pi_{21},\ \pi_2(0|T) = \pi_1(0|T)\pi_{12} + \pi_2(0|T)\pi_{22} \tag{3.5}$$

с условием нормировки $\pi_1(0|T) + \pi_2(0|T) = 1$.

Подставляя полученные в (3.4) вероятности π_{ij} в систему (3.5), находим условные вероятности $\pi_i(0|T)$:

$$
\begin{aligned}
\pi_1(0|T) &= \frac{q\lambda_2\alpha_1 + (1-p)\lambda_1(\lambda_2+\alpha_2) - (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})},\\
\pi_2(0|T) &= \frac{p\lambda_1\alpha_2 + (1-q)\lambda_2(\lambda_1+\alpha_1) - (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})}{z_1 z_2 - (1-p-q)\lambda_1\lambda_2(\pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T})},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

где $z_1 z_2$ определены в (2.4).

Введем $\pi_i(\tau|T)$ − вероятность того, что в момент времени τ процесс $\lambda(t)$ находится в состоянии i ($0 \le \tau \le T$). Относительно введенных вероятностей $\pi_i(\tau|T)$ имеет место система дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\pi_1'(\tau|T) &= -(\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(\tau|T) + (\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(\tau|T),\\
\pi_2'(\tau|T) &= -(\alpha_2 + q\lambda_2)\pi_2(\tau|T) + (\alpha_1 + p\lambda_1)\pi_1(\tau|T).
\end{aligned}
$$

Решая данную систему, полагая $\tau = T$, получаем выражения для вероятностей $\pi_i(T|T)$ ($\pi_i(T|T) = \pi_i(T)$):

$$
\begin{aligned}
\pi_1(T) &= \frac{\alpha_2 + q\lambda_2}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2} + \left(\frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2} - \pi_2(0|T)\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T},\\
\pi_2(T) &= \frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2} - \left(\frac{\alpha_1 + p\lambda_1}{\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2} - \pi_2(0|T)\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2+p\lambda_1+q\lambda_2)T},
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

где $\pi_2(0|T)$ определена в (3.5).

Заменяя в (2.4) τ на $\tau - T$, подставляя (2.4) в (2.3), после чего подставляя (2.3), (3.2) и (3.6) в (3.1) и проделывая достаточно трудоемкие преобразования, получаем формулу для нахождения плотности вероятностей значений длительности интервала между соседними событиями в модулированном синхронном потоке при непродлевающемся мертвом времени $p_T(\tau)$:

$$p_T(\tau) = \gamma(T) z_1 e^{-z_1(\tau - T)} + (1 - \gamma(T)) z_2 e^{-z_2(\tau - T)},$$

где

$$\gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}(z_2 - \lambda_1 \pi_1(T|T) - \lambda_2 \pi_2(T|T)), 1 - \gamma(T) = \frac{1}{z_2 - z_1}(-z_1 + \lambda_1 \pi_1(T|T) + \lambda_2 \pi_2(T|T)),$$

z_1, z_2 определены в (2.5), $\pi_i(T)$ (i = 1, 2) определены в (3.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудин, А. Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. / А. Н. Дудин, В. Н. Клименюк. Мн. : Изд-во БГУ, 2000. С. 175.

2. *Kingman, J. F.* C. On doubly stochastic Poisson process / J. F. C. Kingman // Proceedings Cambridge Phylosophical Society. 1964. V. 60. No. 4. P. 923–930.

3. *Башарин, Г. П.* О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи/ Г. П Башарин, В. А. Кокотушкин, В. А. Наумов // Изд. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1979. № 6. С. 92–99.

4. *Neuts, M. F.* A versatile Markov point process / M. F. Neuts // Journal of Applied Probability. 1979. V. 16. P. 764–779.

5. *Lucantoni, D. M.* New results on the single server queue with a batch markovian arrival process / D. M. Lucantoni // Communication in Statistics Stochastic Models. 1991. V. 7. P. 1−46.

6. *Card, H. C.* Doubly stochastic Poisson processes in artificial neural learning / H. C. Card // IEEE Transactions. Neural Networks. 1998. V. 9. Issue 1. P. 229−231.

7. *Горцев, А. М.* Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий / А. М Горцев, М. Н. Голофастова // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2013. № 2(23). С. 42–53.

8. *Сиротина, М. Н.* Оптимальная оценка состояний модулированного синхронного дважды стохастического потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени / М. Н. Сиротина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 63–72.

9. *Горцев, А. М.* Совместная плотность вероятностей длительности интервалов модулированного синхронного потока событий / А. М. Горцев, М. Н. Сиротина // ИТММ-2014: материалы XIII Международной научно-практической конференции имени А. Ф. Терпугова. Изд-во Том. Ун-та, 2014. Ч. 2. С.147−153.