ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ФИНАНСОВЫХ МОДЕЛЕЙ GARCH(1,1) С УСТОЙЧИВЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

А. С. Серёгин, Н. Н. Труш

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
Естественно-гуманитарный университет
Седлице, Польша
E-mail: aliaksandr.siarohin@gmail.com, TroushNN@bsu.by

В данной статье рассматриваются многомерные GARCH(1,1)-модели с распределениями CTS (Classical Tempered Stable), MTS (Modified Tempered Stable), KR (Kim and Rachev), алгоритм моделирования и алгоритм оценки параметров для данной модели, а также точность работы алгоритма оценки параметров.

Ключевые слова: модель GARCH(1,1), устойчивое распределение, оценка параметров многомерного распределения, кластеризация.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании финансовых рынков часто требуется построение модели для множества финансовых активов одновременно. Если активов достаточно много, то вычислительные мощности современных компьютеров не позволяют построить эти модели за разумное время, поэтому модели часто упрощают, что отрицательно сказывается на точности модели. Поэтому требуется найти компромисс между точностью и простотой модели. В данной статье рассмотрим многомерные GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic – обобщенная авторегрессионная модель гетероскедастичности)-модели. В качестве GARCH-составляющих этих моделей возьмём GARCH(1,1)-модели с нормальным распределением и с распределениями CTS (Classical Tempered stable), MTS (Modified Tempered Stable), KR (Kim and Rachev). Также рассмотрим алгоритм построения данной модели по смоделированным данным.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ УПРОЩЁННОЙ GARCH(1,1)-МОДЕЛИ

Цены активов на рынке распределены согласно многомерной GARCH(1,1)-модели если:

$$\begin{cases} h_i(t) = \mu_i + \sigma_i \xi_{K(i)}(t) + \sigma_i e_i(t); \\ \xi_{K(i)}(t) = S_{K(i)}(t)\eta_{K(i)}(t); \\ (S_{K(i)}(t))^2 = \alpha^0_{K(i)} + \alpha^1_{K(i)} h^2_{t-1} + \beta^1_{K(i)} \sigma^2_{t-1}, \end{cases}$$

$$\alpha^0_{K(i)} > 0, \quad \alpha^1_{K(i)} > 0, \quad \beta^1_{K(i)} > 0, \quad \alpha^1_{K(i)} + \beta^1_{K(i)} < 1;$$

$$\mu_i \in R; \quad \sigma_i > 0; \quad e_i(t) \sim N(0,1), \quad i = \overline{1,n}, \quad t = \overline{1,\infty}.$$

где i – номер актива; n – количество активов; $h_i(t)$ – логарифмический доход i-го актива; $K(i)$ – номер группы i-го актива; $\xi_{K(i)}(t)$ – случайная величина, распределённая согласно GARCH-модели; $S_{K(i)}(t)$ – зависящая от времени волатильность; $\eta_{K(i)}(t)$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих математическое ожидание 0 и дисперсию 1, которые будут иметь распределения CTS, MTS, KR и нормальное [2]; t – номер отсчёта, в котором производится измерения.

2. ВИД СТАНДАРТНОЙ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ РАЗНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

CTS-распределение (медленно растущее устойчивое распределение).

Стандартной плотностью CTS случайной величины ξ называется функция вида:

$$p_{stdCTS}(x;\alpha,\lambda_+,\lambda_-) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux+(ium+C\Gamma(-\alpha)((\lambda_+-iu)^\alpha-\lambda_+{}^\alpha)+C\Gamma(-\alpha)((\lambda_-+iu)^\alpha-\lambda_-{}^\alpha))}du,$$

$$m = -\frac{\Gamma(1-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-1}-\lambda_-^{\alpha-1})}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-2}+\lambda_-^{\alpha-2})}, \; C = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(\lambda_+^{\alpha-2}+\lambda_-^{\alpha-2})}, \quad \lambda_+,\, \lambda_- > 0,\; \alpha \in (0,2),$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \; \text{ – гамма-функция.}$$

MTS-распределение (умеренное устойчивое распределение).

Стандартной плотностью MTS случайной величины ξ называется функция вида:

$$p_{stdMTS}(x;\alpha,\lambda_+,\lambda_-) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux+(ium+C_R(u,\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-)+C_I(u,\alpha,C,\lambda_+,\lambda_-))}du,$$

$$C_R = \frac{\sqrt{\pi}C\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha+3}{2}}}\left((\lambda_+^2+u^2)^{\frac{\alpha}{2}}-\lambda_+^\alpha+(\lambda_-^2+u^2)^{\frac{\alpha}{2}}-\lambda_-^\alpha\right),$$

$$C_I = \frac{iuC\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha+1}{2}}}\left(\lambda_+^{\alpha-1}F\left(1,\frac{1-\alpha}{2},\frac{3}{2},-\frac{u^2}{\lambda_+^2}\right)-\lambda_-^{\alpha-1}F\left(1,\frac{1-\alpha}{2},\frac{3}{2},-\frac{u^2}{\lambda_-^2}\right)\right),$$

$$m = -\frac{C\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha+1}{2}}}\left(\lambda_+^\alpha-\lambda_-^\alpha\right), \quad C = \frac{2^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)\left(\lambda_+^{\alpha-2}+\lambda_-^{\alpha-2}\right)}, \quad \lambda_+,\, \lambda_- > 0, \quad \alpha \in (0,2)\setminus\{1\},$$

$$F(a,b,c,z) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{l=0}^{k-1}\frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)}\right]z^k.$$

KR-распределение (распределение Кима и Рачева).

Стандартной плотностью KR случайной величины ξ называется функция вида:

$$p_{stdKR}(x;\alpha,r_+,r_-,p_+,p_-) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux+\left(H_\alpha(u,k,r_+,p_+)+H_\alpha(-u,k,r_-,p_-)+iu\alpha\Gamma(-\alpha)\left(\frac{kr_+}{p_++1}-\frac{kr_-}{p_-+1}\right)\right)}du,$$

$$H_\alpha(u,k,r,p)=\frac{k\Gamma(-\alpha)}{p}(F(p,-\alpha,1+p,iru)-1),\quad k=\left(\Gamma(2-\alpha)\left(\frac{r_+^{\,2}}{2+p_+}+\frac{r_-^{\,2}}{2+p_-}\right)\right)^{-1},$$

$$r_+,r_->0,\quad \alpha\in(0,2)/\{1\},\quad p_+,p\in(-\alpha,+\infty)\setminus\{-1,0\},$$

$$F(a,b,c,z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\prod_{l=0}^{k-1}\frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)}\right]z^k.$$

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДАННЫХ, РАСПРЕДЕЛЁННЫХ СОГЛАСНО МНОГОМЕРНОЙ УПРОЩЁННОЙ GARCH(1,1)-МОДЕЛИ

Пусть нам требуется смоделировать T наблюдений над n-мерным процессом (то есть количество активов равно n), а количество групп активов равняется L.

1) Смоделируем по T наблюдений над L GARCH(1,1)-моделями [3]. У j-й GARCH(1,1)-модели будут параметры $(a_j^0,\alpha_j^1,\beta_j^1,\theta_j)$, где θ_j – вектор параметров стандартного распределения. Получим выборку $\xi_j(1),\xi_j(2),\dots,\xi_j(T)$; $j=\overline{1,L}$.

2) Смоделируем n значений из дискретного равномерного распределения с параметрами 1, L. Обозначим их $K(i)$, $i=\overline{1,n}$.

3) Смоделируем n раз по T независимых нормальных случайных величин. Обозначим их $e_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $t=\overline{1,T}$.

4) Вычислим $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $t=\overline{1,T}$, по формуле $h_i(t)=\mu_i+\sigma_i\xi_{K(i)}(t)+\sigma_i e_i(t)$.

4. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОЙ GARCH(1,1)-МОДЕЛИ

4.1 Определение номера группы актива

Для разделения бумаг на кластеры используем алгоритм k-mean clustering [4]. В качестве признаков актива возьмём величины $l_i^t=\dfrac{h_i(t)-E[h_i(t)]}{\sqrt{Var[h_i(t)]}}$, $t=\overline{1,T}$. Обозначим через l_i вектор $(l_i^1,l_i^2,\dots,l_i^T)$, $i=\overline{1,n}$.

Таблица 1

Процент неправильно классифицированных бумаг в зависимости от использованной нормы

Название	Формула	Доля ошибок на смоделированных данных
Эвклидова Норма	$\lVert l_i-l_j\rVert=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(l_i^t-l_j^t)^2}$	0.05
Максимум Норма	$\lVert l_i-l_j\rVert=\max(\lvert l_i^t-l_j^t\rvert)$	0.11
Манхэтан Норма	$\lVert l_i-l_j\rVert=\sum_{t=1}^{T}\lvert l_i^t-l_j^t\rvert$	0.06

Как видно при использовании Эвклидовой нормы процент ошибок наименьший. Далее будем использовать лишь Эвклидову норму.

4.2 Оценка параметров внутри группы

Параметры внутри каждой группы оцениваются независимо и одинаково, поэтому опишем процесс лишь для одной группы. Для упрощения описания предположим, что все активы попали в одну группу.

Обозначим $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n)$.

Оценка параметров: $\underset{\sigma,\mu,\alpha^0,\alpha^1,\beta^1,\theta}{\arg\max} L(\sigma, \mu, \alpha^0, \alpha^1, \beta^1, \theta)$. Вычисление argmax можно произвести численно при помощи метода Нельдера – Мида [1].

Вычисление L:

1) Просуммируем следующие значения для всех $t = \overline{1,T}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(t)}{\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \xi(t) + e_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + n\xi(t) + \sum_{i=1}^{n} e_i(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} e_i(t) \underset{n->\infty}{\to} 0 \right] \approx \sum_{i=1}^{n} \mu_i + n\xi_1(t),$$

$$\xi(t) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i(t)}{\sigma_i} - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \right);$$

2) $L(\sigma, \mu, \alpha^0, \alpha^1, \beta^1, \theta) = \ln\left(\prod_{t=1}^{T} \frac{1}{S(t)} p_\eta\left(\frac{\xi(t)}{S(t)} \right) \right) = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\frac{1}{S(t)} p_\eta\left(\frac{\xi(t)}{S(t)} \right) \right),$

где $p_\eta(x)$ – плотность распределения случайной величины $\eta(t)$, $t = \overline{1,T}$ (заметим что, так как все эти величины одинаково распределены, то плотность для всех одинакова). $S(t)$ вычисляется по рекуррентной формуле $S(t) = \sqrt{\alpha^0 + \alpha^1 h_{t-1}^2 + \beta^1 \sigma_{t-1}^2}$;

3) Для упрощения вычислений можно взять $\mu_i = E[h_i(t)]$, $\sigma_i = \sqrt{Var[h_i(t)]}$, $i = \overline{1,n}$, $t = \overline{1,T}$.

4.3 Точность оценки

Для проверки точности смоделируем данные при n = 1000, L = 10, T = 5000. Найдём среднее отклонение оценки параметра от истинного значения, деленное на истинное значение параметра.

Таблица 2

Точность оценки параметров над смоделированными данными

Модель	Параметр	Среднее отклонение оценки параметра от истинного значения деленное на истинное значение
Нормальная	σ	0.07678
	μ	0.03563
	α^0	0.08891
	α^1	0.08341
	β^1	0.10779
CTS	σ	0.07928
	μ	0.03520
	α^0	0.09620
	α^1	0.09160
	β^1	0.12432
	α	0.08183
	λ_+	0.13677
	λ_-	0.16271

MTS	σ	0.07792
	μ	0.03462
	α^0	0.09572
	α^1	0.08334
	β^1	0.11422
	α	0.07010
	λ_+	0.12978
	λ_-	0.19190
KR	σ	0.08132
	μ	0.04870
	α^0	0.10165
	α^1	0.09002
	β^1	0.11770
	α	0.07412
	p_+	0.20051
	p_-	0.16518
	r_+	0.15706
	r_-	0.29349

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье предложена GARCH-модель для большого числа активов, а также описан алгоритм построения данной модели, алгоритм моделирования данных, распределённых согласно многомерной GARCH-модели, и анализ работы данного алгоритма на смоделированных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1.Описание использования метода Нельдора – Мида на языке R [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/optim.html.

2. *Kim, Y. S.* Financial Market Models with Levy Processes and Time-Varying Volatility / Y. S. Kim, S. T. Rachev, M. L. Bianchi, F. J. Fabozzi // Journal of Banking & Finance. 2008. B. 24. № 103. S. 1363–1378.

3. Серёгин, А. С. Исследование моделей GARCH(1,1) с устойчивыми распределениями для цен опционов / Серёгин А. С., Труш Н. Н. // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их приложения. 2014. С. 209–217.

4. Описание алгоритма *k*-mean clustering [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/K-means_clustering.