# О ЗАМКНУТОЙ ДВУХУЗЛОВОЙ СТРУКТУРЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

**Т. В. Русилко**

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы*
*Гродно, Беларусь*
*E-mail: rusilko@grsu.by*

Объектом исследования является замкнутая марковская двухузловая структура массового обслуживания с однотипными заявками, которая представляет собой замкнутую по структуре сеть массового обслуживания, общее число заявок в которой изменяется в соответствии с процессом рождения и гибели, протекающим в одной из систем. Предполагается, что общее число заявок в структуре ограничено постоянной величиной *K*. Целью исследования является асимптотический анализ марковского процесса, описывающего состояние структуры массового обслуживания при большом числе *K*, и нахождение среднего относительного числа заявок в системах обслуживания в произвольный момент времени.

*Ключевые слова*: сеть массового обслуживания, система массового обслуживания, замкнутая структура, заявка, асимптотический анализ.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим двухузловую замкнутую структуру массового обслуживания с однотипными заявками, общее число которых изменяется с течением времени. Пусть $S_0$ и $S_1$ – системы массового обслуживания, между которыми циркулируют заявки с вероятностями перехода $p_{01} = p_{10} = 1$. Предположим, что система $S_i$ имеет $m_i$ линий обслуживания, каждая из которых обслуживает заявки по показательному закону с интенсивностью $\mu_i$, $i = 1{,}2$. Кроме того, будем считать, что число заявок в системе $S_0$ определяется процессом размножения и гибели, который генерирует новые заявки с интенсивностью $\lambda_0^+$ и уничтожает существующие с интенсивностью $\lambda_0^-$. Таким образом, исследуемый объект представляет собой замкнутую по структуре сеть массового обслуживания, общее число заявок в которой изменяется в соответствии с процессом рождения и гибели, протекающим в системе $S_0$. Будем считать, что общее число заявок в структуре не может превышать *K*. Состояние сети определяется вектором

$$k(t) = (k_0(t), k_1(t)), \tag{1}$$

который в силу выше описанного является марковским случайным процессом с непрерывным временем и конечным числом состояний. Очевидно, что общее число заявок в структуре составляет $K(t) = k_0(t) + k_1(t)$. Основной задачей исследования является асимптотический анализ марковского процесса $k(t)$ при большом числе заявок. Поэтому предположим, что структура функционирует в условии большой загрузки заявками, то есть значение $K(t)$ достаточно велико, но ограничено, то есть $0 << K(t) \le K$.

# ВЫВОД СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНЕГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Введем в рассмотрение векторы $I_0 = (1,0)$ и $I_1 = (0,1)$. Рассмотрим все возможные переходы в состояние $k(t+\Delta t) = (k, t+\Delta t)$ процесса $k(t)$ за время $\Delta t$:

- из состояния $(k + I_1 - I_0, t)$ можно попасть в $(k, t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\mu_1 \min(m_1, k_1(t)+1)\Delta t + o(\Delta t);$$

- из состояния $(k + I_0 - I_1, t)$ можно попасть в $(k, t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\mu_0 \min(m_0, k_0(t)+1)\Delta t + o(\Delta t);$$

- из состояния $(k + I_0, t)$ можно попасть в $(k, t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\lambda_0^-(k_0(t)+1)\Delta t + o(\Delta t);$$

- из состояния $(k - I_0, t)$ можно попасть в $(k, t+\Delta t)$ с вероятностью

$$\lambda_0^+(K - k_0(t) - k_1(t)+1)\Delta t + o(\Delta t);$$

- из состояния $(k, t)$ – с вероятностью

$$1 - (\mu_0 \min(m_0, k_0(t)) + \mu_1 \min(m_1, k_1(t)) + \lambda_0^- k_0(t) + \lambda_0^+(K - k_0(t) - k_1(t)))\Delta t + o(\Delta t);$$

- из остальных состояний – с вероятностью $o(\Delta t)$.

Применяя формулу полной вероятности, можно записать систему разностных уравнений для вероятностей состояний $P(k,t)$:

$$\begin{gathered} P(k, t+\Delta t) = P(k + I_1 - I_0, t)\mu_1 \min(m_1, k_1(t)+1)\Delta t + \\ + P(k + I_0 - I_1, t)\mu_0 \min(m_0, k_0(t)+1)\Delta t + P(k + I_0, t)\lambda_0^-(k_0(t)+1)\Delta t + \\ + P(k - I_0, t)\lambda_0^+(K - k_0(t) - k_1(t)+1)\Delta t + P(k,t)\times \\ \times\Big(1 - (\mu_0 \min(m_0, k_0(t)) + \mu_1 \min(m_1, k_1(t)) + \lambda_0^- k_0(t) + \lambda_0^+(K - k_0(t) - k_1(t)))\Delta t\Big) + o(\Delta t). \end{gathered}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим систему разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для этих вероятностей

$$\begin{gathered} \frac{dP(k,t)}{dt} = \mu_1 \min(m_1, k_1(t))(P(k + I_1 - I_0, t) - P(k,t)) + \\ + (\mu_1 \min(m_1, k_1(t)+1) - \mu_1 \min(m_1, k_1(t)))P(k + I_1 - I_0, t) + \\ + \mu_0 \min(m_0, k_0(t))(P(k + I_0 - I_1, t) - P(k,t)) + \\ + (\mu_0 \min(m_0, k_0(t)+1) - \mu_0 \min(m_0, k_0(t)))(P(k + I_0 - I_1, t) + \\ + \lambda_0^- k_0(t)(P(k + I_0, t) - P(k,t)) + \lambda_0^- P(k + I_0, t) + \\ + \lambda_0^+(K - k_0(t) - k_1(t))(P(k - I_0, t) - P(k,t)) + \lambda_0^+ P(k - I_0, t). \end{gathered} \tag{2}$$

Решение этой системы в аналитическом виде в общем случае затруднительно. В связи с этим далее будем рассматривать асимптотический случай большого числа заявок в структуре массового обслуживания, то есть положим, что $K >> 1$. Чтобы найти распределение вероятностей случайного вектора $k(t)$, удобно перейти к относительным переменным и исследовать вектор $\xi(t) = (\xi_0(t), \xi_1(t)) = \left(\frac{k(t)}{K}\right) = \left(\frac{k_0(t)}{K}, \frac{k_1(t)}{K}\right)$. Возможные значения этого вектора при фиксированном $t$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$G=\{x=(x_0,\ x_1):x_0\ge 0,\ x_1\ge 0,\ x_0+x_1\le 1\},$$

в котором они располагаются в узлах двумерной решетки на расстоянии $\varepsilon=\frac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении $K$ «плотность заполнения» множества $G$ возможными компонентами вектора $\xi(t)$ увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью распределения вероятностей $p(x,t)$:

$$p(x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P(x_0\le\xi_0(t)<x_0+\varepsilon,x_1\le\xi_1(t)<x_1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P(Kx_0\le k_0(t)<Kx_0+1,Kx_1\le k_1(t)<Kx_1+1)}{\varepsilon^2},$$

то есть $K^2P(k,t)\xrightarrow[K\to\infty]{}p(x,t)$. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией функции $P(k,t)$, применив соотношение $K^2P(k,t)=K^2P(xK,t)=p(x,t)$, $x\in G$.

Обозначим $e_i=\varepsilon I_i$, $i=0{,}1$. Переписывая систему уравнений (2) для плотности $p(x,t)$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}&=K\mu_1\min(l_1,x_1)(p(x+e_1-e_0,t)-p(x,t))+\\&+\mu_1\frac{\partial\min(l_1,x_1)}{\partial x_1}p(x+e_1-e_0,t)+\\&+K\mu_0\min(l_0,x_0)(p(x+e_0-e_1,t)-p(x,t))+\\&+\mu_0\frac{\partial\min(l_0,x_0)}{\partial x_0}p(x+e_0-e_1,t)+\\&+K\lambda_0^-x_0(p(x+e_0,t)-p(x,t))+\lambda_0^-p(x+e_0,t)+\\&+K\lambda_0^+(1-x_0-x_1)(p(x-e_0,t)-p(x,t))+\lambda_0^+p(x-e_0,t).\end{aligned}$$

где $l_i=\frac{m_i}{K}$, $i=0{,}1$. Представим правую часть этой системы уравнений с точностью до членов порядка малости $\varepsilon^2$. Если $p(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $x$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned}&p(x\pm e_i,t)=p(x,t)\pm\varepsilon\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2p(x,t)}{\partial x_i^2}+o(\varepsilon^2),\\&p(x+e_i-e_j,t)=p(x,t)+\varepsilon\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_i}-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_j}\right)+\\&+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2p(x,t)}{\partial x_i^2}-2\frac{\partial^2p(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2p(x,t)}{\partial x_j^2}\right)+o(\varepsilon^2),\ \ i,j=0{,}1.\end{aligned}\qquad(3)$$

Используя их и то, что $\varepsilon K=1$, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=\mu_1\min(l_1,x_1)\left[\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1\partial x_0}+\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}\right)\right]+$$

$$+\mu_1\frac{\partial\min(l_1,x_1)}{\partial x_1}\left[p(x,t)+\varepsilon\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_1}-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1\partial x_0}+\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}\right)\right]+$$

$$+\mu_0\min(l_0,x_0)\left[\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_1}\right)+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}-2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0\partial x_1}+\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1^2}\right)\right]+$$

$$+\mu_0\frac{\partial\min(l_0,x_0)}{\partial x_0}\left[p(x,t)+\varepsilon\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_1}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}-2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0\partial x_1}+\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_1^2}\right)\right]+$$

$$+\lambda_0^- x_0\left[\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}\right]+\lambda_0^-\left[p(x,t)+\varepsilon\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}\right]+$$

$$+\lambda_0^+(1-x_0-x_1)\left[-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}\right]+\lambda_0^+\left[p(x,t)-\varepsilon\frac{\partial p(x,t)}{\partial x_0}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x_0^2}\right]+o(\varepsilon^2).$$

Последнее уравнение с точностью до членов порядка малости $\varepsilon^2$ можно записать в виде

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{1}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(A_i(x)p(x,t)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{1}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big(B_{ij}(x)p(x,t)\big), \tag{4}$$

где

$$A_0(x)=\mu_1\min(l_1,x_1)-\mu_0\min(l_0,x_0)-\lambda_0^- x_0+\lambda_0^+(1-x_0-x_1)\,, \tag{5}$$

$$A_1(x)=-\mu_1\min(l_1,x_1)+\mu_0\min(l_0,x_0)\,, \tag{6}$$

$$B_{00}(x)=\mu_1\min(l_1,x_1)+\mu_0\min(l_0,x_0)+\lambda_0^- x_0+\lambda_0^+(1-x_0-x_1)\,,$$

$$B_{11}(x)=\mu_1\min(l_1,x_1)+\mu_0\min(l_0,x_0)\,,$$

$$B_{01}(x)=B_{10}(x)=-\mu_1\min(l_1,x_1)-\mu_0\min(l_0,x_0)\,.$$

Итак показано, что плотность р($x$,$t$) случайного вектора $\xi(t)=\big(\xi_0(t),\xi_1(t)\big)$ принадлежит множеству решений уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (4), где $x=(x_0,x_1)$; $A(x,t)=\big(A_0(x,t),A_1(x,t)\big)$ – векторная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения значений исходного случайного процесса; $B(x,t)=\big(B_{ij}(x,t)\big)_{2\times 2}$ – матричная функция векторного аргумента, характеризующая скорость изменения дисперсии рассматриваемого случайного процесса. Тогда согласно [1–3] математические ожидания $n_i(t)=M\big(\xi_i(t)\big)$, $i=0,1$, с точностью до членов порядка малости $O(\varepsilon^2)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{dn_i(t)}{dt}=A_i(n(t)),\ \ i=0,1. \tag{7}$$

Из (5), (6) очевидно, что правые части (7) являются кусочно-линейными функциями. Такие системы целесообразно решать путем разбиения фазового пространства и нахождения решений в областях линейности их правых частей. Определим явную форму полученных уравнений в областях линейности их правых частей. Пусть $\Omega(t)=\{0,1\}$ – множество индексов компонент вектора $n(t)$. Разобьем $\Omega(t)$ на два непересекающихся множества $\Omega_0(t)$ и $\Omega_1(t)$:

$$\Omega_0(t)=\{i: l_i < n_i(t)\le 1\},\ \ \Omega_1(t)=\{j: 0\le n_j(t)\le l_j\}.$$

При фиксированном $t$ число разбиений такого типа равно четырем. Каждое разбиение будет задавать в множестве $G(t)=\left\{n(t): n_0(t)\ge 0, n_1(t)\ge 0, \sum_{i=0}^{1} n_i(t)\le 1\right\}$ непересекающиеся области $G_\tau(t)$ такие, что

$$G_\tau(t)=\left\{n(t): l_i < n_i(t)\le 1, i\in\Omega_0(t); 0\le n_j(t)\le l_j, j\in\Omega_1(t); \sum_{c=0}^{1} n_c(t)\le 1\right\},$$

$\tau=\overline{1,4}$, $\bigcup_{\tau=1}^{4} G_\tau(t)=G(t)$. Для каждой из областей $G_\tau(t)$ можно записать систему уравнений (7) в явной форме.

## ПРИМЕР

Например, рассмотрим область $A$: $\Omega_0(t)=\{0\}, \Omega_1(t)=\{1\}$, которая соответствует отсутствию в среднем очереди в системе $S_1$ и наличию очереди в системе $S_0$. Система дифференциальных уравнений (7) в этой области имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dn_0(t)}{dt}=(\mu_1-\lambda_0^+)n_1(t)-(\lambda_0^-+\lambda_0^+)n_0(t)-\mu_0 l_0+\lambda_0^+, \\ \dfrac{dn_1(t)}{dt}=-\mu_1 n_1(t)+\mu_0 l_0. \end{cases} \tag{8}$$

Система (8) – система обыкновенных линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решения систем такого вида представимы в виде взвешенных сумм экспонент с коэффициентами, не зависящими от $t$. Получим следующее общее решение системы (8) при начальных условиях $n_0(0)=l_0,\ n_1(0)=0$:

$$n_0(t)=\frac{\mu_0 l_0}{\mu_1}-\frac{\mu_0 l_0}{\mu_1}e^{-\mu_1 t}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} n_1(t)=&\frac{\lambda_0^+(\mu_0 l_0+\mu_1)}{\mu_1(\lambda_0^-+\lambda_0^+)}+\frac{\mu_0 l_0(\lambda_0^+-\mu_1)}{\mu_1(\lambda_0^-+\lambda_0^+-\mu_1)}e^{-\mu_1 t}+ \\ &+\frac{l_0(\lambda_0^-+\lambda_0^+)^2+\mu_1\lambda_0^+(1-l_0)+\lambda_0^- l_0(\mu_0-\mu_1)-\lambda_0^+(\lambda_0^-+\lambda_0^+)}{(\lambda_0^-+\lambda_0^+)^2-\mu_1(\lambda_0^-+\lambda_0^+)}e^{-(\lambda_0^-+\lambda_0^+)t}. \end{aligned} \tag{10}$$

Функции (9), (10) позволяют рассчитывать среднее относительное число заявок в системах $S_0$ и $S_1$ структуры массового обслуживания в момент времени $t$. Эти числа рассчитываются относительно величины $K$, – числа потенциально возможных заявок в структуре массового обслуживания.

Очевидно, что в рассматриваемом случае достаточно быстро устанавливается стационарное распределение заявок по системам сети при $t\to+\infty$:

$$n_0=\lim_{t\to\infty} n_0(t)=\frac{\mu_0 l_0}{\mu_1},$$

$$n_1=\lim_{t\to\infty} n_1(t)=\frac{\lambda_0^+(\mu_0 l_0+\mu_1)}{\mu_1(\lambda_0^-+\lambda_0^+)}.$$

Аналогично система дифференциальных уравнений (7) может быть записана и решена в оставшихся трех областях разбиения фазового пространства.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная структура массового обслуживания может быть использована к качестве математической модели процессов обработки заявок, например в страховых или туристических организациях [1]. Число заявок в таких организациях изменяется, однако число потенциально возможных заявок ограничено числом жителей города, в котором они находятся. Рассмотренный метод расчета среднего относительного числа заявок в системах массового обслуживания справедлив только при большой загрузке заявками структуры МО. Точность метода возрастает с увеличением общего числа обслуживаемых заявок.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Маталыцкий, М. А.* Математический анализ стохастических моделей обработки исков в страховых компаниях / М. А. Маталыцкий, Т. В. Русилко. Гродно : ГрГУ, 2007. 335 с.

2. *Медведев, Г. А.* Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания / Г. А. Медведев // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 6. С. 65–73.

3. *Параев, Ю. И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации / Ю. И. Параев. М. : Советское радио, 1976. 185 с.