ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ GI/M/∞ С РАЗНОТИПНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Е. В. Панкратова, С. П. Моисеева

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: pankate@sibmail.com, smoiseeva@mail.ru

Предлагается исследование системы массового обслуживания (СМО) с входящим GI-потоком, неограниченным числом разнотипных обслуживающих приборов и экспоненциальным временем обслуживания методом асимптотического анализа в условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах. Получены выражения для асимптотических характеристических функций первого и второго порядка числа занятых приборов в системе $GI|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием.

Ключевые слова: рекуррентный поток случайных событий, асимптотическая характеристическая функция, разнотипное обслуживание.

ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные исследования реальных потоков в различных предметных областях, в частности, телекоммуникационных потоков, а также потоков в экономических системах, позволили сделать вывод о существенной неадекватности классических моделей потоков (пуассоновских и рекуррентных) реальным данным. На современном этапе развития теории массового обслуживания одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания с поступлением разнотипных заявок, требующих разного времени обслуживания. Область применения таких СМО довольно обширна, например, при моделировании современных информационно-вычислительных систем необходимо учитывать не только характер трафика, а также один из основных принципов проектирования современных компьютерных сетей – параллельность процессов обработки информации. Поэтому возникает необходимость в разработке новых математических моделей систем массового обслуживания, а именно систем с неординарными входящими потоками, а также различными вариантами обслуживания, в том числе с использованием в рамках одной системы разных типов обслуживающих приборов [1] (имеющих различные интенсивности обслуживания). Исследование таких моделей выполняется, как правило, численными методами либо имитационным моделированием со всеми недостатками, вытекающими из этих методов. Альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа для исследования таких систем [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим СМО с неограниченным числом разнотипных обслуживающих приборов и экспоненциальным временем обслуживания. На вход системы поступает рекуррентный поток (GI-поток) случайных событий, заданный функцией распределения $A(x)$ – длин интервалов между моментами наступления событий рекуррентного потока. Дисциплина обслуживания определяется тем, что заявка из входящего потока с вероятностью p_l, $l = 1, \ldots, n$ относится к l-му типу и занимает любой из свободных приборов для обслуживания в течение случайного времени, имеющего экспоненциальную функцию распределения с параметром μ_l, соответствующим типу заявки.

Поставим задачу исследования случайного процесса $\{i_1(t), i_2(t), \ldots, i_n(t)\}$, характеризующего число занятых приборов исследуемой системы в момент времени t. Так как входящий поток не является пуассоновским, то исследуемый случайный n-мерный процесс немарковский. Рассмотрим $(n+1)$-мерный марковский процесс $\{z(t), i_1(t), i_2(t), \ldots, i_n(t)\}$, здесь $z(t)$ – остаточное время от момента времени t до момента наступления следующего события рекуррентного потока. Обозначим $P(z,i_1,i_2,\ldots,i_n,t) = P\{z(t) < z,\ i_1(t) = i_1, \ldots, i_n(t) = i_n\}$ – вероятность того, что в момент времени t на обслуживании находится i_l ($l = 1, \ldots, n$) заявок каждого типа и длина интервала от момента времени t до наступления очередного события потока меньше чем z.

Для совместного распределения вероятностей $P(z,i_1,i_2,\ldots,i_n,t)$ запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,i_1,\ldots,i_n,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,i_1,\ldots,i_n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0,i_1,\ldots,i_n,t)}{\partial z} - \sum_{l=1}^{n} i_l \mu_l P(z,i_1,\ldots,i_n,t) +$$

$$+ (i_1+1)\mu_1 P(z,i_1+1,\ldots,i_n,t) + (i_n+1)\mu_n P(z,i_1,\ldots,i_n+1,t) +$$

$$+ p_1 \frac{\partial P(0,i_1-1,\ldots,i_n,t)}{\partial z} A(z) + p_n \frac{\partial P(0,i_1,\ldots,i_n-1,t)}{\partial z} A(z).$$

Для стационарного распределения вероятностей систему дифференциальных уравнений Колмогорова перепишем в виде

$$\frac{\partial \Pi(z,i_1,\ldots,i_n)}{\partial z} - \frac{\partial \Pi(0,i_1,\ldots,i_n,t)}{\partial z} - \sum_{l=1}^{n} i_l \mu_l \Pi(z,i_1,\ldots,i_n) +$$

$$+ (i_1+1)\mu_1 \Pi(z,i_1+1,\ldots,i_n,t) + (i_n+1)\mu_n \Pi(z,i_1,\ldots,i_n+1,t) +$$

$$+ p_1 \frac{\partial \Pi(0,i_1-1,\ldots,i_n,t)}{\partial z} A(z) + p_n \frac{\partial \Pi(0,i_1,\ldots,i_n-1,t)}{\partial z} A(z) = 0.$$

Введем характеристическую функцию следующего вида:

$$H(z,u_1,\ldots,u_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{i_n=0}^{\infty} e^{ju_n i_1} \cdot \ldots \cdot e^{ju_n i_n} \Pi(z,i_1,\ldots,i_n),$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Запишем систему уравнений для характеристической функции $H(z,u_1,\ldots,u_n)$:

$$\frac{\partial H(z,u_1,\ldots,u_n)}{\partial z} + \frac{\partial H(0,u_1,\ldots,u_n)}{\partial z} \left[\sum_{l=1}^{n} p_l e^{ju_l} A(z) - 1 \right] -$$

$$- j \sum_{l=1}^{n} \mu_l (e^{-ju_l} - 1) \frac{\partial H(z,u_1,\ldots,u_n)}{\partial u_l} = 0. \qquad (1)$$

Решение $H(z,u_1,\ldots,u_n)$ системы (1) удовлетворяет начальным условиям $H(z,0,\ldots,0) = R(z)$, где $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$ вида

$$R(z) = \lambda\int_0^z (1 - A(x))dx\,. \tag{2}$$

Будем решать основное уравнение для характеристической функции (1) в асимптотическом условии эквивалентного роста времени обслуживания на приборах, полагая, что $\mu_l \to 0$, $l = 1, \ldots, n$.

АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Выполним в уравнении (1) следующие замены:

$$\mu_l = q^{l-1}\varepsilon\,,\;\; u_l = \varepsilon q^{l-1}x_l\,,\;\; l = 1,\ldots,n\,,\;\; H(z,u_1,\ldots,u_n) = F_1(z,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)\,. \tag{3}$$

В результате получаем уравнение для $F_1(z,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)$ вида

$$\frac{\partial F_1(z,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)}{\partial z}\left[\sum_{l=1}^n p_l e^{jx_l q^{l-1}} A(z) - 1\right] -$$

$$- j\sum_{l=1}^n q^{l-1}(e^{-j\varepsilon x_l q^{l-1}} - 1)\frac{\partial F_1(z,x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_l} = 0\,. \tag{4}$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_1(z,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon) = F_1(z,x_1,\ldots,x_n) = R(z)\exp\left\{j\lambda\sum_{l=1}^n p_l x_l\right\}.$$

Доказательство.

В системе дифференциальных уравнений (4) выполним предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и получим, что $F_1(z,x_1,\ldots,x_n)$ является решением уравнения вида

$$\frac{\partial F_1(z,x_1,\ldots,x_n)}{\partial z} + \frac{\partial F_1(0,x_1,\ldots,x_n)}{\partial z}\big(A(z) - 1\big) = 0\,.$$

Будем искать $F_1(z,x_1,\ldots,x_n)$ в виде

$$F_1(z,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon) = F_1(z,x_1,\ldots,x_n) = R(z)\Phi_1(x_1,\ldots,x_n)\,, \tag{5}$$

где $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ – искомая функция.

Выполнив в уравнении (4) предельный переход при $z \to \infty$, получим равенство, поделив левую и правую часть которого на ε и выполнив предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$j\sum_{l=1}^n p_l x_l q^{l-1}\,\frac{\partial F_1(z,x_1,\ldots,x_n)}{\partial z} + j^2\sum_{l=1}^n x_l q^{2(l-1)}\,\frac{\partial F_1(\infty,x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_l} = 0\,.$$

Подставим в полученное равенство (5) и получим дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$

$$j\lambda\Phi_1(x_1,\ldots,x_n)\sum_{l=1}^n p_l x_l q^{l-1} - \sum_{l=1}^n x_l q^{2(l-1)}\,\frac{\partial\Phi_1(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_l} = 0\,,$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию $\Phi(0, \ldots, 0) = 1$, имеет вид

$$\Phi_1(x_1,...,x_n)=\exp\left\{j\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\right\}.$$

Учитывая (5), получим вид функции $F_1(z,x_1,...,x_n)$

$$F_1(z,x_1,...,x_n)=R(z)\exp\left\{j\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\right\}. \qquad \square$$

Учитывая введенные замены (3), получаем вид функции $H(z,u_1,\ldots,u_n)$:

$$H(z,u_1,...,u_n)=R(z)\exp\left\{j\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l \frac{u_l}{\mu_l}\right\}. \tag{6}$$

Определение 1. Функцию

$$h_1(u_1,...,u_n)=Me^{j\sum_{l=1}^{n}u_l i_l}=\exp\left\{j\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l \frac{u_l}{\mu_l}\right\} \tag{7}$$

будем называть асимптотической характеристической функцией первого порядка числа занятых приборов в системе $GI|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием.

Определение 2. Функцию

$$h_1(u_l)=\exp\left\{j\lambda p_l \frac{u_l}{\mu_l}\right\},\quad l=1,...,n, \tag{8}$$

будем называть асимптотической характеристической функцией первого порядка числа занятых приборов l-ого типа (l = 1, …, n) в системе GI/M/∞ с разнотипным обслуживанием.

АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В уравнении (1) выполним следующую замену:

$$H(z,u_1,...,u_n)=H_2(z,u_1,...,u_n)\exp\left\{j\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l \frac{u_l}{\mu_l}\right\}.$$

Тогда получим следующее выражение для $H(z,u_1,\ldots,u_n)$:

$$\frac{\partial H_2(z,u_1,...,u_n)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(0,u_1,...,u_n)}{\partial z}\left[\sum_{l=1}^{n}p_l e^{ju_l}A(z)-1\right]-$$
$$-j\sum_{l=1}^{n}\mu_l(e^{-ju_l}-1)\left(\frac{\partial H_2(z,u_1,...,u_n)}{\partial u_l}+H_2(z,u_1,...,u_n)j\lambda\frac{p_l}{\mu_l}\right)=0. \tag{9}$$

Введем следующие замены:

$$\mu_l=q^{l-1}\varepsilon^2,\ \ u_l=\varepsilon q^{l-1}x_l,\ \ l=1,...,n,\ \ H_2(z,u_1,...,u_n)=F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon).$$

Тогда получим

$$\frac{\partial F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon)}{\partial z}+\frac{\partial F_2(0,x_1,...,x_n,\varepsilon)}{\partial z}\left[\sum_{l=1}^{n}p_l e^{j\varepsilon x_l q^{l-1}}A(z)-1\right]-$$
$$-j\sum_{l=1}^{n}(e^{-j\varepsilon x_l q^{l-1}}-1)\frac{\partial F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon)}{\partial x_l}+\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l(e^{-j\varepsilon x_l q^{l-1}}-1)F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon)=0. \tag{10}$$

Теорема 1.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon)=F_2(z,x_1,...,x_n)=$$

$$=R(z)\exp\left\{ j^2\lambda\sum_{l=1}^{n} p_l\,\frac{{x_l}^2 q^{l-1}}{2}+j^2\sum_{l=1}^{n}\frac{{p_l}^2{x_l}^2q^{l-1}}{2}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}+\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{n}\frac{p_l p_s x_l x_s q^{l-1}q^{s-1}}{q^{l-1}+q^{s-1}}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}\right\},$$

где функции $f_l(z)$, $l = 1, \ldots, n$, являются решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f_l(z)}{\partial z}+\frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z)+\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}\big(A(z)-1\big)-\lambda R(z)=0\,. \tag{11}$$

Доказательство. Решение уравнения (10) будем искать в виде

$$F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon)=\Phi_2(x_1,...,x_n)\left\{R(z)+j\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\,f_l(z)q^{l-1}\right\}+\mathrm{O}(\varepsilon^2)\,. \tag{12}$$

Можно показать, что результат не зависит от выбора значений величин $f_l(\infty)$, поэтому будем полагать, что $f_l(\infty) = 0$, $l = 1, \ldots, n$. Подставив (12) в (10), разделив обе части полученного выражения на ε и устремив $\varepsilon \to 0$, получим выражение

$$\Phi_2(x_1,...,x_n)\left\{ j\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\,\frac{\partial f_l(z)}{\partial z}q^{l-1}+j\,\frac{\partial R(0)}{\partial z}\sum_{l=1}^{n}p_l x_l A(z)q^{l-1}+\right.$$

$$\left.+\,j\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\,\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}q^{l-1}(A(z)-1)+j\lambda R(z)\sum_{l=1}^{n}p_l x_l q^{l-1}\right\}=0\,.$$

Откуда имеем систему дифференциальных уравнений для $f_l(z)$, $l = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial f_l(z)}{\partial z}+\frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z)+\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}\big(A(z)-1\big)-\lambda R(z)=0\,,$$

совпадающую с (11).

Для нахождения вида функции $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n)$ разложим все экспоненты в системе (10) в ряд Тейлора и подставим в разложение $F_2(x_1, \ldots,x_1,\varepsilon)$ в виде (12):

$$\Phi_2(x_1,...,x_n)\left\{ j\varepsilon\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\,\frac{\partial f_l(z)}{\partial z}q^{l-1}+j\,\frac{\partial R(0)}{\partial z}A(z)\sum_{l=1}^{n}p_l\left(j\varepsilon x_l q^{l-1}+\frac{\left(j\varepsilon x_l q^{l-1}\right)^2}{2}\right)+\right.$$

$$+\,j\varepsilon\sum_{l=1}^{n}p_l x_l\,\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}q^{l-1}(A(z)-1)+\left(j\varepsilon\right)^2A(z)\sum_{l=1}^{n}p_l x_l q^{l-1}\,\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}\sum_{s=1}^{n}p_s x_s q^{s-1}-$$

$$\left.-\,j\lambda\varepsilon R(z)\sum_{l=1}^{n}p_l x_l q^{l-1}-\left(j\varepsilon\right)^2\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l x_l q^{l-1}\sum_{s=1}^{n}p_s x_s q^{s-1}f_s(z)+\lambda R(z)\sum_{l=1}^{n}p_l\,\frac{\left(j\varepsilon x_l q^{l-1}\right)^2}{2}\right\}+$$

$$+\left(j\varepsilon\right)^2R(z)\sum_{l=1}^{n}x_l q^{l-1}\,\frac{\partial\Phi_2(x_1,...,x_n)}{\partial x_l}=\mathrm{O}(\varepsilon^3)\,. \tag{13}$$

Разделим обе части (13) на ε^2 и устремим $\varepsilon \to 0$ и $z \to \infty$, и получим дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n)$

$$\sum_{l=1}^{n}x_l q^{l-1}\,\frac{\partial\Phi_2(x_1,...,x_n)}{\partial x_l}= \tag{14}$$

$$=\left(j\varepsilon\right)^2\lambda\sum_{l=1}^{n}p_l\left(x_l q^{l-1}\right)^2+\sum_{l=1}^{n}p_l\left(x_l q^{l-1}\right)^2+\sum_{l=1}^{n}p_l x_l q^{l-1}\,\frac{\partial f_l(0)}{\partial z}\sum_{s=1}^{n}p_s x_s q^{s-1}\,.$$

Решением дифференциального уравнения (14), удовлетворяющим начальному условию $\Phi_2(x_1, \dots, x_n) = 1$, является функция $\Phi_2(x_1, \dots, x_n)$ вида

$$\Phi_2(x_1,...,x_n) = \exp\left\{ j^2\lambda\sum_{l=1}^{n} p_l \frac{x_l^{\,2} q^{l-1}}{2} + j^2\sum_{l=1}^{n} \frac{p_l^{\,2} x_l^{\,2} q^{l-1}}{2}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{n} \frac{p_l p_s x_l x_s q^{l-1} q^{s-1}}{q^{l-1}+q^{s-1}}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z} \right\}. \quad (15)$$

□

Учитывая сделанные ранее замены и равенства

$$H_2(z,u_1,...,u_n) = F_2(z,x_1,...,x_n,\varepsilon) \approx F_2(z,x_1,...,x_n) = R(z)\Phi_2(z,x_1,...,x_n),$$

запишем выражение для функции $H_2(z,u_1,\dots,u_n)$:

$$H_2(x_1,...,x_n) =$$

$$= R(z)\exp\left\{ j^2\lambda\sum_{l=1}^{n} p_l \frac{x_l^{\,2} q^{l-1}}{2} + j^2\sum_{l=1}^{n} \frac{p_l^{\,2} x_l^{\,2} q^{l-1}}{2}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{n} \frac{p_l p_s x_l x_s q^{l-1} q^{s-1}}{q^{l-1}+q^{s-1}}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z} \right\}.$$

Определение 3. Функцию

$$h_2(u_1,...,u_n) = H_2(\infty,x_1,...,x_n) = Me^{j\sum_{l=1}^{n} u_l i_l} = H_2(\infty,x_1,...,x_n)\exp\left\{ j\lambda\sum_{l=1}^{n} p_l x_l \right\} =$$

$$= R(z)\exp\left\{ j^2\lambda\sum_{l=1}^{n} p_l \frac{x_l^{\,2} q^{l-1}}{2} + j^2\sum_{l=1}^{n} \frac{p_l^{\,2} x_l^{\,2} q^{l-1}}{2}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{n} \frac{p_l p_s x_l x_s q^{l-1} q^{s-1}}{q^{l-1}+q^{s-1}}\frac{\partial f_l(0)}{\partial z} \right\}$$

будем называть асимптотической характеристической функцией второго порядка числа занятых приборов в системе $GI|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована СМО $GI|M|\infty$ с разнотипным обслуживанием. Для исследования применялся метод асимптотического анализа, который позволил найти выражения для асимптотической характеристической функции первого и второго порядка числа занятых приборов в рассматриваемой системе. В дальнейшем планируется асимптотические результаты сравнить с полученными ранее точными значениями основных вероятностных характеристик и сделать выводы об области применимости асимптотических методов.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pankratova, E.* Queueing System MAP|M|∞ / E. Pankratova, S. Moiseeva // 13th Intern. Scien. Conf. ITMM 2014 named after A. F. Terpugov. Anzhero-Sudzhensk, 2014. P. 356–366.

2. *Назаров, А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. Назаров, С. Моисеева. Томск : НТЛ, 2006. 112 с.