АНАЛИЗ СЕТИ С МНОГОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ И ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ ЗАЯВОК РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ

В. В. Науменко, М. А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Гродно, Беларусь
E-mail: victornn86@gmail.com

В работе проведен анализ открытой марковской сети с ограниченным временем ожидания разнотипных заявок, многолинейными системами массового обслуживания (СМО) и зависимыми от времени параметрами потока и обслуживания. Для вероятностей состояний сети получена система разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) Колмогорова. С помощью метода многомерных производящих функций найдены вероятности состояний. Данная сеть может быть использована при моделировании функционирования сервисного центра информационной сети с учетом ограниченности времен ожидания клиентов в очередях.

Ключевые слова: ограниченное время ожидания, разнотипные заявки, многолинейные СМО, производящая функция, вероятности состояний.

СИСТЕМА РАЗНОСТНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТИ

Описание сетей с разнотипными заявками приведено в работе [1]. Состояние сети в момент времени t описывается вектором

$$k=(k_{11},k_{12},...,k_{1r},k_{21},k_{22},...,k_{2r},...,k_{n1},k_{n2},...,k_{nr},t),$$

где k_{ic} – число заявок типа c в системе S_i (в очереди и на обслуживании), обозначим через $k(t)$ состояние сети в момент времени t. Система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, заявки при переходе между СМО сети могут менять свой тип. Длительность пребывания заявок типа c в очереди i-ой СМО является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром θ_{ic}, и не зависит от других факторов, например, от времени пребывания в очереди других заявок. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в систему S_j с вероятностью q_{icjs}, $\sum_{j=0}^{n}\sum_{s=1}^{r}q_{icjs}=1$, $q_{icis}=0$, $i=\overline{0,n}$, $c=\overline{1,r}$. Матрицы $P=\left\|p_{icjs}\right\|_{(n+1)\times n}$ и $Q=\left\|q_{icjs}\right\|_{n\times(n+1)}$, $c=\overline{1,r}$, $s=\overline{1,r}$ являются матрицами переходов неприводимых марковских цепей.

Будем рассматривать случай, когда параметры входящего потока заявок, обслуживания и длительности пребывания в очереди на обслуживание зависят от времени. На интервале времени $[t,t+\Delta t)$ в сеть поступает заявка с вероятностью $\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)$. Если в момент времени t на обслуживании в i-й СМО находится заявка типа c, то на интервале $[t, t+\Delta t)$ ее обслуживание закончится с вероятностью $\mu_{ic}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$. Если на интервале времени $[t, t+\Delta t)$ время ожидания заявки в очереди i-й СМО истекло, то она покидает очередь с вероятностью $\theta_{ic}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$.

Пусть $N_{ic}(t)$ – среднее число заявок типа c в системе S_i в момент времени t, $\rho_{ic}(t)$ – среднее число занятых линий обслуживания в системе S_i заявками типа c в момент времени t, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$.

Лемма 1. Вероятности состояний рассматриваемой сети удовлетворяют системе РДУ:

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = -\left\{\lambda(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)u(k_{ic}) + \theta_{ic}(t)N_{ic}^{(оч)}(t)u(k_{ic}-m_i)\right]\right\}P(k,t) +$$
$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r} p_{0cic}u(k_{ic})P(k-I_{ic},t) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)u(k_i)p_{ic0c} + \theta_{ic}(t)N_{ic}^{(оч)}(t)u(k_{ic}+1-m_i)q_{ic0c}\right]P(k+I_{ic},t) +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{icjs} + \theta_{ic}(t)N_{ic}^{(оч)}(t)q_{icjs}\right)u(k_{js})P(k+I_{ic}-I_{js},t). \qquad (1)$$

НАХОЖДЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

В системе уравнений (1) ограничение на время ожидания в очереди накладывается на все заявки независимо от того, какое место в очереди эти заявки занимают. Однако на практике аналогичное ограничение накладывается, как правило, на последнюю заявку в очереди. В этом случае система уравнений для вероятностей состояний сети принимает вид:

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = -\left\{\lambda(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)u(k_{ic}) + \theta_{ic}(t)u(k_{ic}-m_i)\right]\right\}P(k,t) +$$
$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r} p_{0cic}u(k_{ic})P(k-I_{ic},t) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)u(k_i)p_{ic0c} + \theta_{ic}(t)u(k_{ic}+1-m_i)q_{ic0c}\right]P(k+I_{ic},t) +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{icjs} + \theta_{ic}(t)q_{icjs}\right)u(k_{js})P(k+I_{ic}-I_{js},t). \qquad (2)$$

Предположим, что во всех системах сети число заявок каждого типа больше либо равно числа линий обслуживания в них, т.е.

$$k_{ic}(t) \geq m_i, \quad \forall t>0, \quad i=\overline{1,n}, \quad c=\overline{1,r}. \qquad (3)$$

Тогда (2) имеем:

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = -\left\{\lambda(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t) + \theta_{ic}(t)\right]\right\}P(k,t) + \lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r} p_{0cic}P(k-I_{ic},t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{ic0c}+\theta_{ic}(t)q_{ic0c}\right]P(k+I_{ic},t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{icjs}+\theta_{ic}(t)q_{icjs}\right)P(k+I_{ic}-I_{js},t), \qquad (4)$$

количество уравнений в данной системе счетно, когда сеть открыта, и конечно, когда она замкнута.

Обозначим через $\Psi_{nr}(z,t)$, где $z=(z_{11},...,z_{1r},...,z_{n1},...,z_{nr})$, $n\times r$-мерную производящую функцию:

$$\Psi_{nr}(z,t)=\sum_{k_{11}=0}^{\infty}...\sum_{k_{1r}=0}^{\infty}...\sum_{k_{n1}=0}^{\infty}...\sum_{k_{nr}=0}^{\infty}P(k_{11},...,k_{1r},..,k_{n1},...,k_{nr},t)\,z_{11}^{k_{11}}...\,z_{1r}^{k_{1r}}\,...\,z_{n1}^{k_{n1}}...z_{nr}^{k_{nr}}=$$

$$=\sum_{k_{11}=0}^{\infty}...\sum_{k_{1r}=0}^{\infty}...\sum_{k_{n1}=0}^{\infty}...\sum_{k_{nr}=0}^{\infty}P(k,t)\prod_{i=1}^{n}\prod_{c=1}^{r}z_{ic}^{k_{ic}}\ , \qquad (5)$$

при этом мы считаем, что $P(k_{11},...,k_{1r},...,k_{n1},...,k_{nr},t)=0$, когда $0\le k_{ic}(t)\le m_i$, в силу того, что мы предположили, что выполняется неравенство (3).

Лемма 2. Если в начальный момент времени сеть МО находится в состоянии $(x_{11},...,x_{1r},x_{21},...,x_{2r},...,x_{n1},...,x_{nr},0)$, $x_{ic}\ge m_i$, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$, то выражение для производящей функции (5) можно записать в виде

$$\Psi_{nr}(z,t)=C_n(z)\exp\left\{\int\left[-\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)+\theta_{ic}(t)\right]\right]+\right.\right.$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}p_{0cic}z_{ic}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{ic0c}+\theta_{ic}(t)q_{ic0c}\right]\frac{1}{z_{ic}}+$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{icjs}+\theta_{ic}(t)q_{icjs}\right)\frac{z_{js}}{z_{ic}}\right]dt\right\}, \qquad (6)$$

где

$$C_n(z)=\exp\left\{\int\left[\left[\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)+\theta_{ic}(t)\right]\right]+\right.\right.$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}p_{0cic}z_{ic}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{ic0c}+\theta_{ic}(t)q_{ic0c}\right]\frac{1}{z_{ic}}+$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left(\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)p_{icjs}+\theta_{ic}(t)q_{icjs}\right)\frac{z_{js}}{z_{ic}}\right]dt\,\Big|_{t=0}\right\}\prod_{l=1}^{n}\prod_{d=1}^{r}z_{ld}^{k_{ld}}\ .$$

Введем следующие обозначения:

$$\Lambda(t)=\int\lambda(t)\,dt,\ \ \mathrm{M}(t)=\int\mu_{ic}(t)\rho_{ic}(t)dt,\ \ \Theta(t)=\int\theta_{ic}(t)dt.$$

Тогда с их учетом, получим, что (6) примет вид:

$$\Psi_{nr}(z,t)=\exp\left\{-\left[\Lambda(t)-\Lambda(0)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mathrm{M}_{ic}(t)-\mathrm{M}_{ic}(0)+\Theta_{ic}(t)-\Theta_{ic}(0)\right]\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{(\Lambda(t)-\Lambda(0))\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}p_{0cic}z_{ic}\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\left(\mathrm{M}_{ic}(t)-\mathrm{M}_{ic}(0)\right)p_{ic0c}+\left(\Theta_{ic}(t)-\Theta_{ic}(0)\right)q_{ic0c}\right]\frac{1}{z_{ic}}\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\left[\left(\mathrm{M}_{ic}(t)-\mathrm{M}_{ic}(0)\right)p_{icjs}+\left(\Theta_{ic}(t)-\Theta_{ic}(0)\right)q_{icjs}\right]\frac{z_{js}}{z_{ic}}\right\}\prod_{l=1}^{n}\prod_{d=1}^{r}z_{ld}^{k_{ld}}. \qquad (7)$$

Преобразуем (7) к виду, удобному для нахождения вероятностей состояний сети, разложив входящие в него экспоненты в ряд Маклорена. Тогда справедливо следующее утверждение

Теорема. Выражение для производящей функции (7) имеет вид

$$\Psi_{nr}(z,t)=a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{u_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{u_n=0}^{\infty}\sum_{w_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{w_1=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\prod_{c=1}^{r}\prod_{j=1}^{n}\prod_{s=1}^{r}\left\{\frac{p_{0cic}^{l_i}}{l_i!u_i!w_i!}\times\right.$$

$$\times\left[\Lambda(t)-\Lambda(0)\right]^{l_i}\left[\left(\left(\mathrm{M}_{ic}(t)-\mathrm{M}_{ic}(0)\right)p_{ic0c}+\left(\Theta_{ic}(t)-\Theta_{ic}(0)\right)q_{ic0c}\right)\right]^{u_i}\times$$

$$\left.\times\left[\left(\mathrm{M}_{ic}(t)-\mathrm{M}_{ic}(0)\right)p_{icjs}+\left(\Theta_{ic}(t)-\Theta_{ic}(0)\right)q_{icjs}\right]^{w_i}z_{ic}^{x_{ic}+l_i-u_i+W}\right\}, \qquad (8)$$

$$a_0(t)=\exp\left\{-\left[\Lambda(t)-\Lambda(0)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\mathrm{M}_{ic}(t)-\mathrm{M}_{ic}(0)+\Theta_{ic}(t)-\Theta_{ic}(0)\right]\right]\right\},$$

где $W=\sum_{i=1}^{n}w_{\mathrm{i}}$.

Вероятности состояний сети можно найти как коэффициенты разложения функции $\Psi_{nr}(z,t)$ в многократный ряд (8) по степеням $z_{ic}^{k_{ic}}$, при условии, что в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(x_{11},...,x_{1r},x_{21},...,x_{2r},...,x_{n1},...,x_{nr},0)$, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$.

Если предположить, что заявки равномерно выбираются на обслуживание, то среднее число занятых линий обслуживания в системе S_i заявками типа c в момент времени t можно найти в виде

$$\rho_{ic}(t)=\frac{N_{ic}(t)}{\sum_{c=1}^{r}N_{ic}(t)}m_i,\ i=\overline{1,n},\ c=\overline{1,r},$$

а $N_{ic}(t)$ удовлетворяет системе неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_{ic}(t)}{dt}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s=1}^{r}\left[m_j\left(\mu_{js}(t)p_{jsic}-\theta_{js}(t)q_{jsic}\right)\frac{N_{js}(t)}{\sum_{l=1}^{r}N_{jl}(t)}\right]+m_i\left(\theta_{ic}(t)-\mu_{ic}(t)\right)\frac{N_{ic}(t)}{\sum_{c=1}^{r}N_{ic}(t)}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{s=1}^{r}\theta_{js}(t)q_{jsic}N_{js}(t)-\theta_{ic}(t)N_{ic}(t)+\lambda(t)p_{0cic},\ i=\overline{1,n},\ c=\overline{1,r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маталыцкий, М. А.* Исследование сетей с многолинейными системами обслуживания и разнотипными заявками / М. А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. 1996. № 9. С. 79–92.