ИССЛЕДОВАНИЕ БИСТАБИЛЬНОЙ RQ-СИСТЕМЫ С ПРИОРИТЕТОМ ПОСТУПАЮЩИХ ЗАЯВОК

А. А. Назаров, Я. Е. Черникова

НИ Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail:evgenevna.92@mail.ru

В работе исследована RQ-система M| GI| 1 методом асимптотического анализа в условии большой задержки. С помощью численного алгоритма построено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Было получено дискретное распределение, которое называем диффузионной аппроксимацией исходного распределения вероятностей.

Ключевые слова: RQ-система, приоритет заявок, диффузионный процесс.

В семидесятые годы в теории массового обслуживания предлагаются и начинают интенсивно рассматриваться системы обслуживания, принципиально отличающиеся от систем с ожиданием и систем с отказами, которые получили название RQ-систем (Retrial Queueing Systems) или систем с повторными вызовами. По этой тематике в монографии Artalejo J. R. [1] приведено более семисот ссылок на работы, опубликованные за последние двадцать лет. Первые математические результаты, касающиеся систем с повторными вызовами, были опубликованы в 40-х гг. прошлого века. Системы такого рода были рассмотрены Вилкинсоном и Коэном. Основные подходы к описанию систем с источником повторных вызовов (ИПВ) были рассмотрены Гоштони, Элдином. Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Г. И. Фалина [2] и Artalejo J. R. Ими получены допредельные характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|c и т.д., а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем.

В работах Cobham [3], Phipps [4], Schrage [5], Jaiswal [6], Madan [7], Simon [8], Choi и Chang [9], приоритет рассматривается в том смысле, что имеется два типа входящих клиентов. Также исследователями RQ-систем с приоритетами являлись K. Altinkemer, I. Bose и R. Pal., Rengnanathan, Krishna Reedy G. V., Nadarajan R, Bocharov P. P., Pavlova O. I. Мы же рассмотрим систему, в которой присутствует один тип заявок и если при поступлении заявка обнаруживает прибор занятым, то она вытесняет обслуживаемую.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим RQ-систему M| GI| 1 с приоритетом поступающих заявок (рис. 1). На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Если прибор занят, то поступившая заявка вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор, а заявка, которая обслуживалась переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь встает на прибор. Если прибор свободен, то заявка занимает его на случайное время обслуживания, если же он занят, то заявка из ИПВ вытесняет обслуживаемую и сама встает на прибор, а та, которая стояла на приборе, уходит в ИПВ.

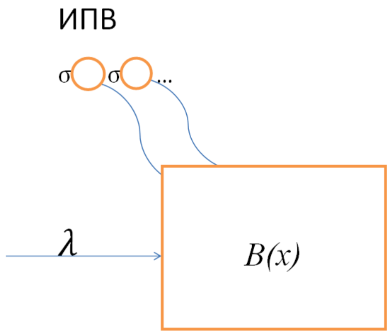

Рис. 1. RQ-система M| GI| 1 с приоритетом поступающих заявок

Обозначим $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, & \text{если прибор свободен,}\\ 1, & \text{если прибор занят.}\end{cases}$$

Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в ИПВ и состояний прибора.

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Так как процесс $\{k(t), i(t)\}$ не является марковским, то рассмотрим процесс с переменным числом компонент.

Если $k(t)=0$, то рассматриваем процесс $\{k(t), i(t)\}$. Если $k(t)=1$, то рассматриваем процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$, где $z(t)$ – остаточное время от момента t до момента окончания обслуживания.

Обозначим $P\{k(t)=0, i(t)=i\}=P_0(i,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии 0 и в источнике повторных вызовов находится i заявок; $P\{k(t)=1, i(t)=i, z(t)<z\}=P_1(i,z,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t находится в состоянии 1, остаточное время обслуживания меньше z и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Для распределения вероятностей $\{P_0(i,t), P_1(i,z,t)\}$ запишем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t}-\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z}=\lambda B(z)P_0(i,t)-(\lambda+i\sigma)P_1(i,z,t)+\\ +(\lambda+i\sigma)P_1(i,\Delta t,t)+i\sigma B(z)P_1(i,\infty,t)+\lambda B(z)P_1(i-1,\infty,t)+(i+1)\sigma B(z)P_0(i+1,t),\\ \frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t}-\frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z}=-(\lambda+i\sigma)P_0(i,t),\end{gathered}\tag{1}$$

в которой применяется обозначение

$$\frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z}=\left.\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Перейдем в системе (1) к частичным характеристическим функциям вида

$$H_0(u,t)=\sum_{i-0}^{\infty}e^{jui}P_0(i,t),\quad H_1(u,z,t)=\sum_{i-0}^{\infty}e^{jui}P_1(i,z,t),$$

где $j=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Система уравнений запишется в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial t}-\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}=\lambda B(z)H_0(u,t)-\lambda H_1(u,z,t)+\\+j\sigma\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial u}-j\sigma B(z)\frac{\partial H_1(u,t)}{\partial u}-j\sigma B(z)e^{-ju}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\lambda B(z)e^{ju}H_1(u,t),\\\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t}-\frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}=-\lambda H_0(u,t)+j\sigma\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}.\end{gathered}\qquad(2)$$

Аналитически данную систему решить затруднительно. Будем решать ее методом асимптотического анализа в условии большой задержки ($\sigma\to 0$).

АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В системе (2) сделаем замены

$$\sigma=\varepsilon,\quad u=\varepsilon w,\quad \tau=\varepsilon t,\quad H_0(u,t)=F_0(w,\tau,\varepsilon),\quad H_1(u,z,t)=F_1(w,z,\tau,\varepsilon),$$

выразим из второго уравнения $\dfrac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}$ и подставим в первое, получим

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}-\varepsilon\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}=\lambda(B(z)-1)F_0(w,\tau,\varepsilon)+\\+j(1-e^{-j\varepsilon w}B(z))\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}-\lambda F_1(w,z,\tau,\varepsilon)+j\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial w}-jB(z)\frac{\partial F_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\\+\lambda e^{j\varepsilon w}B(z)F_1(w,\tau,\varepsilon)+O(\varepsilon^2).\end{gathered}\qquad(3)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $\{F_0(w,\tau), F_1(w,z,\tau)\}$ решения $\{F_0(w,\tau,\varepsilon), F_1(w,z,\tau,\varepsilon)\}$ системы уравнений (3) имеет вид

$$F_0(w,\tau)=R_0(x(\tau))e^{jwx(\tau)},\quad F_1(w,z,\tau)=R_1(x(\tau),z)e^{jwx(\tau)},$$

где величины $R_0(x(\tau))$, $R_1(x(\tau),z)$ удовлетворяют следующим выражениям:

$$R_0(x(\tau))=\int_0^{\infty}e^{-(\lambda+x(\tau))z}dB(z),\quad R_1(x(\tau),z)=e^{-(\lambda+x(\tau))z}(\lambda+x(\tau))\int_0^{z}e^{-(\lambda+x(\tau))y}[R_0(x(\tau))-B(y)]dy,$$

а $x(\tau)$ является решением уравнения

$$dx(\tau)=\left[-(\lambda+x(\tau))R_0(x(\tau))+\lambda\right]d\tau=A(x(\tau))d\tau.\qquad(4)$$

АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для более детального исследования рассматриваемой RQ-системы найдем асимптотику второго порядка. В системе (2) выполним замены:

$$H_0(u,t)=H_0^{(2)}(u,t)e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)},\quad H_1(u,z,t)=H_1^{(2)}(u,z,t)e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}. \tag{5}$$

Получим систему:

$$\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H_1(u,z,t)-\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial z}+\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H_0(u,t)=$$

$$=\lambda(B(z)-1)H_0(u,t)+j\sigma(1-e^{-ju}B(z))\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}-(1-e^{-ju}B(z))x(\sigma t)H_0(u,t)-\lambda H_1(u,z,t)+$$

$$+j\sigma\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial u}-x(\sigma t)H_1(u,z,t)-j\sigma B(z)\frac{\partial H_1(u,t)}{\partial u}+x(\sigma t)H_1(u,t)+\lambda B(z)e^{ju}H_1(u,t).$$

Выполнив замены

$$\sigma=\varepsilon^2,\quad u=\varepsilon w,\quad \tau=\varepsilon t,\quad H_0^{(2)}(u,t)=F_0(w,\tau,\varepsilon),\quad H_1^{(2)}(u,z,t)=F_1(w,z,\tau,\varepsilon), \tag{6}$$

можно показать, что распределение вероятностей $P(y,\tau)$, определяемое характеристической функцией $F_0(w,\tau,\varepsilon)+F_1(w,\infty,\tau,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$, удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка следующего вида

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau}=-\frac{\partial}{\partial y}\{a(x(\tau))yP(y,\tau)\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\{b(x(\tau))P(y,\tau)\}.$$

Здесь $a(x(\tau))y$ – коэффициент переноса, где $a(x(\tau))y=R_1^*(x(\tau))-R_0(x(\tau))$, а $b(x(\tau))=x(\tau)R_0(x(\tau))+\lambda R_1(x(\tau))+2x'(\tau)R_1^*(x(\tau))$ – коэффициент диффузии.

Отсюда, для процесса $y(\tau)=\sqrt{\sigma}\left(i(t)-\frac{x(\tau)}{\sigma}\right)$, можно записать стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dy(\tau)=a(x(\tau))y(\tau)d\tau+\sqrt{b(x(\tau))}dw(\tau),$$

где $w(\tau)$ – винеровский случайный процесс.

Обозначим

$$z(\tau)=\sigma i\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)=x(\tau)+\sqrt{\sigma}y(\tau).$$

Тогда имеем следующее уравнение

$$dz(\tau)=dx(\tau)+\sqrt{\sigma}dy(\tau)=A(x(\tau))d\tau+\sqrt{\sigma}\left(a(x(\tau))y(\tau)d\tau+\sqrt{b(x(\tau))}dw(\tau)\right)=$$

$$=\left(A(x(\tau))+\sqrt{\sigma}y(\tau)a(x(\tau))\right)d\tau+\sqrt{\sigma b(x(\tau))}dw(\tau).$$

В силу того, что $a(z)=A'(z)$, мы можем записать

$$dz(\tau)=A(z(\tau))d\tau+\sqrt{\sigma b(z(\tau))}dw(\tau).$$

Обозначим

$$\pi(z,\tau)=\frac{\partial}{\partial z}\{P(z(\tau)<z)\}$$

и получим уравнение Фоккера – Планка для $z(\tau)$:

$$\frac{\partial \pi(z,\tau)}{\partial \tau}=-\frac{\partial}{\partial z}\{A(z)\pi(z,\tau)\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{\sigma b(z)\pi(z,\tau)\}.$$

Пусть $\pi(z,\tau)\equiv\pi(z)$. Тогда имеем

$$-\{A(z)\pi(z)\}'+\frac{1}{2}\{\sigma b(z)\pi(z)\}''=0.$$

Откуда

$$\pi(z)=\frac{1}{b(z)\int\limits_0^\infty \frac{1}{b(y)}\exp\left(\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{A(x)}{b(x)}dx\right)dy}\exp\left\{\frac{2}{\sigma}\int\limits_0^z \frac{A(x)}{b(x)}dx\right\}.$$

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

В работе [10], был получен численный алгоритм, следуя которому можно получить распределение вероятностей $P(i)$.

В качестве примера рассмотрим взвешенную сумму гамма и экспоненциального распределений

$$B^*(x)=qe^{-\alpha x}+(1-q)\left(1+\frac{x}{\gamma}\right)^{-1}, \tag{7}$$

в котором заданы положительные значения параметров α, β, γ и $0\le q\le 1$.

Значения параметров распределения положим равными

$$q=0.93,\quad \alpha=1,\quad \gamma=10,\quad N=1000,\quad \sigma=0.01. \tag{8}$$

На рис. 2 приведен график распределения $P(i)$, полученный реализацией численного алгоритма, при значениях параметров времени обслуживания, указанных в (8). Интенсивность λ здесь полагается равной λ = 0.31197.

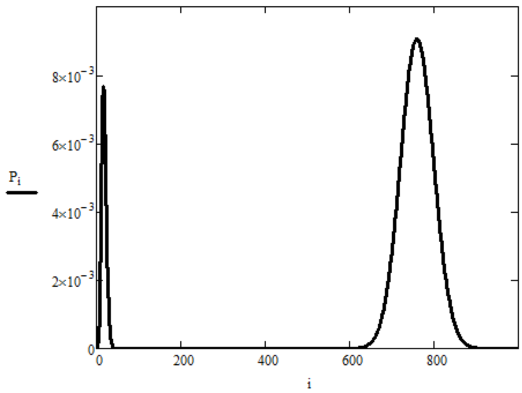

Рис. 2. График распределения $P(i)$

С помощью плотности распределения вероятностей $\pi(z)$ значений диффузионного процесса $z(\tau)$, построим дискретное распределение

$$Pd(i)=\frac{1}{d}\pi(\varepsilon i),\quad i\ge 1,$$

где $\varepsilon=0.01$, $d=\sum_{n=1}^{N}\pi(\varepsilon n)$, которое будем называть диффузионной аппроксимацией исходного распределения $P(i)$.

Для оценки точности такой аппроксимации будем принимать величину

$$\Delta=\max\left|\sum_{n=0}^{i}\big(P(n)-Pd(n)\big)\right|,$$

равную расстоянию Колмогорова для функций распределения. Эта аппроксимация является точной, так как значение величины при заданных значениях параметров составляет $\Delta = 0.03$.

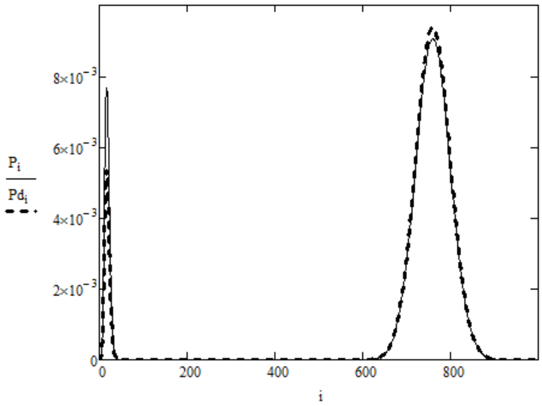

Рис. 3. Графики распределения $P(i)$ и распределения $Pd(i)$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована нестационарная RQ-система M| GI| 1 методом асимптотического анализа в условии большой задержки. В качестве примера численной реализации мы рассмотрели взвешенную сумму экспоненциального и гамма распределений. С помощью численного алгоритма построено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. Было получено дискретное распределение, которое называем диффузионной аппроксимацией исходного распределения вероятностей. Аппроксимация является достаточно точной, так как расстояние Колмогорова не превышает 0.03.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo, J. R.* A Classified Bibliography of Research on Retrial Queues: Progress in 1990-1999 / J. R. Artalejo // Top. 1999. V. 7, Issue 2. P. 187–211.

2. *Falin, G. I.* A Survey of Retrial Queues / G. I. Falin // Queuing Systems. 1990. V. 7. P. 127–167.

3. *Cobham, A.* Priority Assignments in Waiting Line Problems / A. Cobham // Operations Research. 1954. V. 2. No. 1. P. 70–76.

4. *Phipps, T. E.* Machine Repair as a Priority Waiting Line Problem / T. E. Phipps // Operations Research. 1956. V. 4. No. 1. P. 76–85.

5. *Schrage, L. E.* The Queue M/G/1 with Feedback to Lower Priority Queues / L. E. Schrage // Management Science. 1967. V. 13. No. 7. P. 466–474.

6. *Jaiswal, N. K.* Priority Queues / N. K. Jaiswal. New York : Academic Press, 1968.

7. *Madan, K. C.* A Priority Queueing System with Service Interruptions / K. C. Madan // Statistica Neerlandica. 1973. V. 27. No. 3. P. 115–123.

8. *Simon, B.* Priorty Queues with Feedback / B. Simon // Journal of the Association for Computing Machinery. 1984. V. 31. No. 1. P. 134–149.

9. *Choi, B. D.* Single Server Retrial Queues with Priority Calls / B. D. Choi, Y. Chang // Mathematical and Computer Modeling. 1999. V. 30. No. 3–4. P. 7–32.

10. *Nazarov, A. A.* The accuracy of Gaussian approximations of probabilities distribution of states of the retrial queueing system with priority new customers / A. A. Nazarov, Y. E. Chernikova // 13th Intern. scientific conf., ITMM named after A. F. Terpugov “Information Technologies and mathematical modeling”, 2014. P. 325–333.

Работа выполнена в рамках государственного заказа No.~1.511.2014/K Министерства образования и науки Российской федерации.