ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА С ЗАВИСИМЫМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ РАЗМЕРАМИ ИСКОВ

П. М. Лаппо

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: lappopm@bsu.by

Получено выражение для вероятности разорения за конечное время в предположении произвольной возрастающей функции взносов. Размеры исков предполагаются зависимыми целочисленными случайными величинами, а длительности временных промежутков между соседними исками имеют экспоненциальные распределения с различными параметрами.

Ключевые слова: вероятность разорения, зависимые иски.

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем использовать обозначения из работы [2]. Предположим, что считающий процесс N_t определяется равенством $N_t = \#\{i : \tau_1 + ...\tau_i \le t\}$, где # в правой части равенства означает количество элементов множества $\{\cdot\}$, а $\tau_1,...,\tau_i,...$ являются независимыми экспоненциально распределенными случайными величинами (с.в.) с различными $E\{\tau_i\} = 1/\lambda_i$, $\lambda_i > 0$, т.е., $P(\tau_i > y) = e^{-\lambda_i y}$, для $y > 0$, и $P(\tau_i > y) = 1$, для $y \le 0$, $i = 1,2,...$.

Рассмотрим целочисленные с.в. $W_1, W_2,...$, независимые от N_t, представляющие собой совокупность последовательных исков. Мы будем обозначать совместное распределение $W_1, W_2,..., W_i$ через $P(W_1 = w_1,..., W_i = w_i) = P_{w_1,...,w_i}$, где $w_1 \ge 1, w_2 \ge 1,..., w_i \ge 1$, $i = 1,2,...$.

Совокупный иск в момент *t* будет равен

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} W_i ,$$

а фонд страховой компании

$$R_t = h(t) - S_t ,$$

где $h(t)$ является функцией, выражающей размер поступивших взносов. Мы будем предполагать, что $h(t)$ – неотрицательная, возрастающая, действительная функция, определенная на R_+ и такая, что $\lim_{t\to\infty} h(t) = +\infty$. В классической модели риска (см. например, [1]) предполагается, что $h(t) = u + ct$, где через *u* обозначен начальный капитал, а через *c* – интенсивность поступления взносов.

Обозначим через $h^{-1}(y) = \inf\{z : h(z) \ge y\}$, $\mathrm{v}_i = h^{-1}(i)$, для $i = 0,1,...$. Ясно, что $0 = \mathrm{v}_0 \le \mathrm{v}_1 \le \mathrm{v}_2 \le ...$. Момент разорения обозначим через *T*, т.е., $T = \inf\{t : t > 0, R_t \le 0\}$.

Мы будем интересоваться вероятностью неразорения $P(T > x)$ на конечном временном интервале $[0, x], x > 0$. Мы выведем формулу для этой вероятности.

В работе [3] рассматривается ситуация, когда считающий процесс N_t является пуассоновским с интенсивностью λ, а с.в. $W_1, W_2, \ldots$ – целочисленные независимые и одинаково распределенные. При этих предположениях получено выражение для вероятности $P(T > x)$. В работе [2] приводятся двусторонние границы для вероятности $P(T > x)$.

2. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ $P(T > x)$

Мы предположим, что длина временного интервала x является фиксированной. Обозначим через $n = [h(x)] + 1$, где $[h(x)]$ является целой частью $h(t)$. Так как $w_1 \geq 1, \ldots, w_n \geq 1$, мы имеем $w_1 + \ldots + w_n \geq n$, и, следовательно существует целое k, $1 \leq k \leq n$, такое, что $w_1 + \ldots + w_{k-1} \leq n - 1$, и $w_1 + \ldots + w_k \geq n$. Мы можем считать k таким, что $v_{w_1+\ldots+w_{k-1}} \leq x < v_{w_1+\ldots+w_k}$. Заметим, что k является подходящей функцией $w_1, \ldots, w_n$, т.е. $k = k(w_1, \ldots, w_n)$. Пусть $I\{.\}$ обозначает индикатор события $\{.\}$.

Теорема. Для вероятности неразорения справедливо равенство:

$$P(T > x) = \sum_{\substack{w_1 \geq 1 \\ \ldots \\ w_n \geq 1}} P_{w_1, \ldots, w_n} \Big(I\{k = 1\} e^{-\lambda_1 x} + I\{k > 1\} \times$$

$$\times \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k \sum_{j=1}^{k-1} c_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, z_1, \ldots, z_{k-1}, j) \left(\frac{e^{-\lambda_j x}}{\lambda_j} - \frac{e^{(\lambda_k - \lambda_j) z_{k-1}} e^{-\lambda_k x}}{\lambda_k} \right),$$

считая, что $v_{n-1} \leq x < v_n$, где $z_l = v_{w_1+\ldots+w_l}$, $l = 1, 2, \ldots$, и

$$c_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, z_1, \ldots, z_{k-1}, j) = \prod_{m=j}^{k} \frac{1}{\lambda_m - \lambda_j}$$

для $1 \leq j \leq k - 2$, а

$$c_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, z_1, \ldots, z_{k-1}, k-1) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \sum_{j=1}^{k-2} c_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, z_1, \ldots, z_{k-2}, j) e^{(\lambda_{k-1} - \lambda_{k-1-j}) z_{k-2}}.$$

Доказательство. Применяя формулу полной вероятности, мы можем выразить вероятность неразорения в виде (см. [2], p.49):

$$P(T > x) = \sum_{\substack{w_1 \geq 1 \\ \ldots \\ w_n \geq 1}} P_{w_1, \ldots, w_n} P(T > x / W_1 = w_1, \ldots, W_n = w_n). \tag{1}$$

Справедливы равенства:

$$P(T > x / W_1 = w_1, \ldots, W_n = w_n) =$$

$$= P\Big(\bigcap_{l=1}^{k-1} (\tau_1 + \ldots + \tau_l \geq v_{w_1+\ldots+w_l}) \bigcap (\tau_1 + \ldots + \tau_k \geq x)\Big)$$

для $k \geq 2$, и

$$P(T > x / W_1 = w_1,...,W_n = w_n) = \int_x^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y_1} dy_1 = e^{-\lambda_1 x}, \qquad (2)$$

для $k = 1$.

Так как далее мы предполагаем $w_1,...w_n$ фиксированными, то для простоты используем обозначение $z_l = \mathrm{v}_{w_1+...+w_l}$, $l = 1,2,...$. Тогда, для $k \ge 2$

$$P(\bigcap_{l=1}^{k-1}(\tau_1 + ... + \tau_l \ge \mathrm{v}_{w_1+...+w_l})\bigcap(\tau_1 + ... + \tau_k \ge x)) =$$

$$= P(\bigcap_{l=1}^{k-1}(\tau_1 + ... + \tau_l \ge z_l)\bigcap(\tau_1 + ... + \tau_k \ge x)) =$$

$$= \lambda_1 ... \lambda_k \int_x^{+\infty}\int_{z_{k-1}}^{y_k}\int_{z_{k-2}}^{y_{k-1}} ... \int_{z_1}^{y_2} \exp((\lambda_2 - \lambda_1)y_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)y_2 + ... +$$

$$+ (\lambda_k - \lambda_{k-1})y_{k-1} - \lambda_k y_k) dy_1 dy_2 ... dy_k. \qquad (3)$$

Обозначим правую часть предыдущего равенства через *I*. Чтобы найти *I*, мы введем обозначения:

$$I(\lambda_i, \lambda_j, z_{i-1}, y_i) = (e^{(\lambda_i - \lambda_j)y_i} - e^{(\lambda_i - \lambda_j)z_{i-1}}),$$

$$I_{l+1} = \int_{z_l}^{y_{l+1}}\int_{z_{l-1}}^{y_l} ... \int_{z_1}^{y_2} \exp((\lambda_2 - \lambda_1)y_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)y_2 + ... + (\lambda_{l+1} - \lambda_l)y_l) dy_1 dy_2 ... dy_l.$$

Тогда

$$I_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)y_2} - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z_1}) = c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1) I(\lambda_2, \lambda_1, z_1, y_2),$$

где $c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1) = 1/(\lambda_2 - \lambda_1)$. Последовательно вычисляя интегралы в (3), мы имеем

$$I_3 = \int_{z_2}^{y_3} c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1) I(\lambda_2, \lambda_1, z_1, y_2) e^{(\lambda_3 - \lambda_2)y_2} dy_2 =$$

$$= c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1) \int_{z_2}^{y_3} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)y_2} - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z_1}) e^{(\lambda_3 - \lambda_2)y_2} dy_2 =$$

$$= c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1)\left(\int_{z_2}^{y_3} e^{(\lambda_3 - \lambda_1)y_2} dy_2 - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z_1} \int_{z_2}^{y_3} e^{(\lambda_3 - \lambda_2)y_2} dy_2 \right) =$$

$$= c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1)\left(\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1} I(\lambda_3, \lambda_1, z_2, y_3) - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z_1} \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} I(\lambda_3, \lambda_2, z_2, y_3) \right) =$$

$$= c_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, 1) I(\lambda_3, \lambda_1, z_2, y_3) + c_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, 2) I(\lambda_3, \lambda_2, z_2, y_3),$$

где

$$c_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, 1) = c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1) \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1},$$

$$c_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, 2) = -c_2(\lambda_1, \lambda_2, z_1, 1) \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)z_1}.$$

$$I_k = \int_{z_{k-1}}^{y_k}\int_{z_{k-2}}^{y_{k-1}} ... \int_{z_1}^{y_2} \exp((\lambda_2 - \lambda_1)y_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)y_2 + ... + (\lambda_k - \lambda_{k-1})y_{k-1}) dy_1 ... dy_{k-1} =$$

$$=\sum_{j=1}^{k-1} c_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,z_1,...z_{k-1},j)I(\lambda_k,\lambda_j,z_{k-1},y_k)\,.$$

Здесь коэффициенты $c_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,z_1,...z_{k-1},j)$ вычисляются по формулам, указанным в теореме. Заметим, что интеграл I можно выразить в виде

$$I=\lambda_1...\lambda_k\int_x^{+\infty}\sum_{j=1}^{k-1} c_k(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k,z_1,...z_{k-1},j)I(\lambda_k,\lambda_j,z_{k-1},y_k)e^{-\lambda_k y_k}\,dy_k\,. \qquad (4)$$

Так как

$$\int_x^{+\infty} I(\lambda_k,\lambda_j,z_{k-1},y_k)e^{-\lambda_k y_k}\,dy_k=\int_x^{+\infty}(e^{(\lambda_k-\lambda_j)y_k}-e^{(\lambda_k-\lambda_j)z_{k-1}})e^{-\lambda_k y_k}\,dy_k=$$

$$=\frac{1}{\lambda_j}e^{-\lambda_j x}-\frac{1}{\lambda_k}e^{(\lambda_k-\lambda_j)z_{k-1}}e^{-\lambda_k x},$$

то объединяя (1–4), мы получаем основной результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bowers, N.* Actuarial mathematics / N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones, C. Nesbitt. Schaumburg, Society of Actuaries, 1997. 624 p.

2. *Ignatov, Z.* Two- sided bounds for the finite time probability of ruin / Z. Ignatov, V. Kaishev // Scand. Actuar. J. 2000. V. 1. P. 46–62.

3. *Picard, Ph.* The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution / Ph. Picard, C. Lefevre // Scand. Actuarial J. 1997. V. 1. P. 58–69.