ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕОРДИНАРНЫМИ ПОТОКАМИ

Е. В. Кудрявцев, М. А. Федоткин

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Н. Новгород, Российская Федерация
E-mail: evgkudryavcev@gmail.com, fma5@rambler.ru

Рассматривается проблема управления конфликтными неординарными потоками двух классов. К первому классу принадлежат потоки большой интенсивности, а второй класс включает потоки малой интенсивности. Предлагается адаптивный алгоритм управления процессом разрешения и запрещения обслуживания требований потоков. Такого рода алгоритмы могут быть использованы в системах управления потоками машин на пересекающихся магистралях. Изучение таких управляемых конфликтных систем обслуживания сводится к исследованию класса векторных марковских последовательностей сложной вероятностной структуры.

Ключевые слова: конфликтные потоки, неординарные пуассоновские потоки, адаптивный алгоритм, марковская векторная последовательность, разложимая цепь.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИСТЕМЫ

Рассматривается управляемая система массового обслуживания с m независимыми входными потоками заявок. Предполагается, что входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$ являются конфликтными [1–4]. Это означает, что заявки различных входных потоков могут обслуживаться только в непересекающиеся промежутки времени. Моменты, в которых появляются требования конкретного неординарного потока, будем называть вызывающими. Интервалы между вызывающими моментами для потока Π_j с номером $j = 1, 2, \ldots, m$ являются независимыми случайными величинами, распределенными по показательному закону с параметром λ_j. Обозначим через $\alpha_j \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $0 \leq \gamma_j < 1$ некоторые параметры входных потоков. В каждый вызывающий момент потока Π_j поступает $r = 1, 2, \ldots$ требований с вероятностью $R_j(r)$, где

$$\begin{aligned} R_j(1) &= (1+\alpha_j+\alpha_j\beta_j/(1-\gamma_j))^{-1}, \\ R_j(2) &= \alpha_j(1+\alpha_j+\alpha_j\beta_j/(1-\gamma_j))^{-1}, \\ R_j(r) &= \alpha_j\beta_j\gamma_j^{\,r-3}(1+\alpha_j+\alpha_j\beta_j/(1-\gamma_j))^{-1}, \quad r \geq 3. \end{aligned} \tag{1}$$

В работе [5] для неординарного пуассоновского потока типа (1) получена вероятность

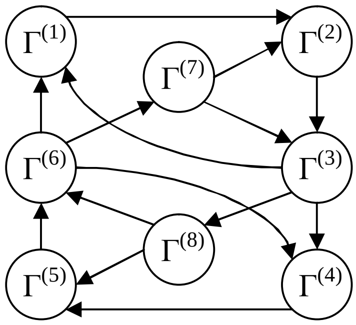
$$P_j(t,k) = e^{-\lambda_j t}\sum_{n=0}^{[k/2]}\alpha_j^{\,n}\frac{(\lambda_j t p_j)^{k-n}}{n!(k-2n)!} +$$

$$+ e^{-\lambda_j t}\sum_{n=0}^{[k/2]}\alpha_j^{\,n}\sum_{i=1}^{\min\{k-2n,n\}}\beta_j^{\,i}\sum_{l=0}^{k-2n-i}\gamma_j^{\,l}\frac{(\lambda_j t p_j)^{k-n-i-l}C_{i+l-1}^{l}}{(n-i)!i!(k-2n-i-l)!}$$

прихода за время t по j-му потоку $k = 0, 1, \ldots$ заявок, где $p_j = R_j(1)$. Требования потока Π_j поступают в накопитель O_j неограниченной ёмкости с дисциплиной обслуживания FIFO.

Будем предполагать, что в системе потоки Π_1, Π_2 являются наиболее интенсивными. Кроме того допускаем, что каждый из потоков $\Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_m$ имеет малую интенсивность и их требования обслуживаются без помех во время обслуживания требований потоков Π_1 или Π_2. Поэтому, будем изучать поведение системы только по отношению к потокам Π_1 и Π_2. В силу этого в дальнейшем полагаем, что j, s суть номера потоков, $j, s = 1, 2, j \neq s$.

Управление потоками будем осуществлять с помощью обслуживающего устройства, в котором выделены состояния $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(8)}\}$. Для управления случайными моментами $\tau_0, \tau_1, \ldots$ смены состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(8)}$ обслуживающего устройства системы с переменной структурой [1–3] предлагается некоторый адаптивный алгоритм. Перейдём к описанию этого алгоритма, который определяется правилами изменения состояний $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(8)}$ и случайными временами пребывания в каждом из этих состояний. Смена состояний обслуживающего устройства задается графом следующего вида



Рассмотрим подробно условия смены состояний обслуживающего устройства и определим, как длительности пребывания в каждом состоянии $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(8)}$, так и назначение этих состояний по процессу управления потоками и обслуживания требований.

Состояние $\Gamma^{(3j-2)}$ соответствует первому этапу обслуживания j-го потока. Длительность обслуживания одной заявки, поступившей из накопителя O_j потока Π_j, считается равной постоянной величине $\mu_{j,1}^{-1}$. Длительность пребывания в $\Gamma^{(3j-2)}$ равна T_{3j-2}.

Состояние $\Gamma^{(3j-1)}$ соответствует второму этапу обслуживания j-го потока. Длительность обслуживания в этом состоянии одной заявки считается равной постоянной величине $\mu_{j,2}^{-1} < \mu_{j,1}^{-1}$. Данный этап можно назвать этапом продлений. Длительность одного продления равна T_{3j-1}, максимальное число продлений есть параметр n_j. Первое продление является обязательным. Если в момент окончания очередного продления в системе находится меньше, чем K_j заявок j-го потока, и к тому же на данном этапе по потоку с номером j не пришло ни одной заявки, то обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(3j)}$. В противном случае происходит следующий этап продления. Таким образом, длительность пребывания в состоянии $\Gamma^{(3j-1)}$ есть случайная величина, принимающая значения kT_{3j-1}, $k = 1, 2, \ldots, n_j$.

Состояние $\Gamma^{(3j)}$ соответствует режиму переналадки для j-го потока. Длительность пребывания в этом состоянии равна T_{3j}. Длительность обслуживания одной заявки в состоянии $\Gamma^{(3j)}$ равна величине $\mu_{j,2}^{-1}$. В данном состоянии происходит только дообслуживание требований потока Π_j, другие заявки к обслуживанию не принимаются.

Состояние $\Gamma^{(6+j)}$ соответствует первому этапу периода обслуживания j-го потока в случае, когда возможен мгновенный переход в состояние $\Gamma^{(3j)}$. Длительность пребывания в $\Gamma^{(6+j)}$ является случайной величиной. Максимальное время пребывания в этом состоянии составляет T_{3j-2}. В момент перехода в состояние $\Gamma^{(6+j)}$ очередь по потоку Π_j пуста, и обслуживающее устройство начинает следить за очередностью подхода заявок по потокам Π_1 и Π_2. Если первой поступит заявка j-го потока, то обслуживание этого потока продолжится, и через промежуток времени T_{3j-2} с момента перехода в состояние $\Gamma^{(6+j)}$ обслуживающее устройство перейдет в состояние $\Gamma^{(3j-1)}$. Если первой поступит заявка s-го потока, то произойдет «немедленный вызов», то есть система немедленно перейдет в состояние $\Gamma^{(3j)}$. Наконец, если в течение промежутка времени T_{3j-2} заявки в систему не поступят, то обслуживающее устройство перейдет в состояние $\Gamma^{(3j)}$.

Для каждого потока введем коэффициент $\delta_j \in (0,1]$. Параметр δ_j означает, какую часть обслуживания должна пройти заявка j-го потока прежде, чем на обслуживание поступит следующее требование. Обозначим через V_j максимальное количество заявок j-го потока, которые могут обслуживаться одновременно. Легко видеть, что равенство $V_j = 1$ верно только при $\delta_j = 1$. При $\delta_j < 1$ мы получаем, что есть такое натуральное число V_j, для которого выполняется $V_j - 1 < \delta_j^{-1} \le V_j$.

Примем следующие соотношения для параметров T_r, $r = 1, \ldots, 6$,

$$T_{3j\text{-}2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2}\delta_j\mu_{j,1}^{-1},\quad T_{3j\text{-}1} = l_{3j-1}\delta_j\mu_{j,2}^{-1},\quad T_{3j} = l_{3j}\delta_j\mu_{j,2}^{-1},$$

где $l_{3j-2} \in X$ (множество целых неотрицательных чисел), l_{3j-1} и l_{3j} – произвольные натуральные числа. При этом l_{3j} выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $T_{3j} \ge \mu_{j,1}^{-1}$.

Для математического описания системы введем:

- случайную величину $\eta_{j,i}$, которая определяет число поступивших в систему заявок j-го потока на промежутке $[\tau_i; \tau_{i+1})$, и вектор $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$;
- случайный элемент Γ_i, который определяет состояние обслуживающего устройства на интервале $[\tau_i; \tau_{i+1})$, где $i = 0, 1, \ldots$;
- случайный вектор η_i', принимающий значения $y_0 = (0,0)$, $y_1 = (1,0)$, $y_2 = (0,1)$ в зависимости от того, по какому из потоков заявка поступила в систему первой на такте $[\tau_i; \tau_{i+1})$;
- случайную величину $\overline{\xi}_{j,i}$, определяющую число заявок j-го потока, которые реально покинут систему на промежутке $[\tau_i; \tau_{i+1})$, и вектор $\overline{\xi}_i = (\overline{\xi}_{1,i}, \overline{\xi}_{2,i})$;
- случайную величину $\xi_{j,i}$, определяющую максимально возможное число заявок j-го потока, которые система может обслужить на промежутке $[\tau_i; \tau_{i+1})$, и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$;
- случайную величину $\kappa_{j,i}$, определяющую число заявок j-го потока, которые находятся в накопителе O_j в момент τ_i, и вектор $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$.

Пусть $x = (x_1, x_2) \in X^2$ и $y \in \{y_0, y_1, y_2\}$. Используя введенные случайные величины, можно записать алгоритм смены состояний в виде функции $\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i')$, где отображение $u(\Gamma^{(h)}, x, y) : \Gamma \times X^2 \times \{y_0, y_1, y_2\} \to \Gamma$ имеет следующий вид

$$u(\Gamma^{(h)}, x, y) = \begin{cases} \Gamma^{(3j-2)}, & \text{если} \quad \begin{array}{l} \left\{\left[\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(3s)}\right] \wedge \left[\left(x_j > 0\right) \vee \left(x_s \ge K_s\right) \vee \left(y = y_j\right)\right]\right\} \vee \\ \vee \left\{\left[\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(3j)}\right] \wedge \left[x_s = 0\right] \wedge \left[x_j \le K_j\right] \wedge \left[y = y_j\right]\right\}; \end{array} \\ \Gamma^{(3j-1)}, & \text{если} \quad \left\{\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(3j-2)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(6+j)}\right] \wedge \left[y = y_j\right]\right\}; \\ \Gamma^{(3j)}, & \text{если} \quad \left\{\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(3j-1)}\right\} \vee \left\{\left[\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(6+j)}\right] \wedge \left[y_i \ne y_j\right]\right\}; \\ \Gamma^{(6+j)}, & \text{если} \quad \left[\Gamma^{(h)} = \Gamma^{(3s)}\right] \wedge \left[x_j = 0\right] \wedge \left[x_s < K_s\right] \wedge \left[y_i = y_0\right]; \\ & \qquad j, s = 1, 2;\ j \ne s. \end{cases} \qquad (2)$$

ВИД СТРАТЕГИИ МЕХАНИЗМА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Чтобы получить нелокальное описание [1–3] процесса обслуживания требований на промежутке $[\tau_i; \tau_{i+1})$, необходимо для $j = 1, 2$ определить стратегию механизма обслуживания. Поэтому для каждого $i = 0, 1, \ldots$ нужно указать функциональную зависимость $\overline{\xi}_{j,i} = g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i})$. На выбор этой функции накладываются естественные ограничения: $0 \le g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) \le \xi_{j,i}$, $0 \le g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) \le \kappa_{j,i} + \eta_{j,i}$. Отсюда легко видеть, что $0 \le g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) \le \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}$.

Напомним, что любое состояние из множества $\Gamma \backslash \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$ всегда соответствует периоду обслуживания для одного из потоков, в $\{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$ возможно лишь дообслуживание требований одного из потоков. В силу этих особенностей системы необходимо рассмотреть отдельно состояния из множества $\Gamma \backslash \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$ и состояния из множества $\{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$. Принимая экстремальную стратегию обслуживания [1–3], соответственно получаем

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad \Gamma_i \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\},$$

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \tag{3}$$

Так как рассматривается система без потерь, то справедливы следующие равенства

$$\kappa_{j,\, i+1} = \kappa_{j,\, i+1} + \eta_{j,\, i+1} - \overline{\xi}_{j,i},$$

$$\kappa_{j,i+1} = v_j(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}), \, i \ge 0, \, j = 1, 2,$$

где $v_j(\Gamma^{(h)}, x_j, b_j, a_j): \Gamma \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$.

Из формул (3) можно получить вид функциональной зависимости для $v_j(\Gamma^{(h)}, x_i, b_i, a_i)$:

$$v_j(\Gamma^{(h)}, x_i, b_i, a_i) = \begin{cases} \max\{0; x_i + b_i - a_i\}, & \textit{если } \Gamma^{(h)} \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ b_i + \max\{0; x_i - a_i\}, & \textit{если } \Gamma^{(h)} \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases} \tag{4}$$

Полным описанием системы по управлению конфликтными потоками и по обслуживанию требований на промежутке $[\tau_i; \tau_{i+1})$ является вектор $(\Gamma_i, \kappa_i) = (\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i})$.

Лемма 1. Формулы (2) и (4) определяют по $i = 0, 1, \ldots$ рекуррентное соотношение

$$(\Gamma_{i+1}, \kappa_{i+1}) = (u(\Gamma_i, \kappa_i, \eta'_i), v(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i))$$

для случайной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$, если

$$v(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = (v_1(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \eta_{1,i}, \xi_{1,i}), v_2(\Gamma_i, \kappa_{2,i}, \eta_{2,i}, \xi_{2,i})).$$

Для построенной векторной последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$, являющейся вероятностной моделью рассматриваемой системы, была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Случайная векторная последовательность $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i = 0, 1, \ldots\}$ с заданным начальным распределением вектора $\{(\Gamma_0, \kappa_0)\}$ является марковской.

Описанная марковская цепь является разложимой и, значит, все её состояния не образуют один класс сообщающихся состояний. В лемме 2 проведена классификация состояний изучаемой марковской последовательности.

Лемма 2. Пусть $j, s = 1, 2, j \neq s, x \in \mathrm{X}^2$ и пусть

$$G^{(3j-2)} = \{(\Gamma^{(3j-2)}, x_s y_s) : x_s < K_s - l_{3s}\},$$

$$G^{(3j-1)} = \{(\Gamma^{(3j-1)}, x_s y_s) : x_s < K_s - l_{3s}\},$$

$$G^{(6+j)}=\{(\Gamma^{(6+j)},x):x_j>0\}\bigcup\{(\Gamma^{(6+j)},x):x_s\geq K_s-l_{3s}\},$$

$$G_j=\begin{cases}G^{(6+j)}\bigcup G^{(3j-2)}, & \text{при } l_{3j-2}>0;\\ G^{(6+j)}\bigcup G^{(3j-2)}\bigcup G^{(3j-1)}, & \text{при } l_{3j-2}=0.\end{cases}$$

Тогда состояния из G_j являются несущественными и класс G_0 = G\{$G_1 \bigcup G_2$} является неразложимым апериодическим классом существенных состояний.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Следующим шагом в исследовании описанной управляемой системы массового обслуживания будет вычисление рекуррентных соотношений для одномерных распределений $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(h)}, \kappa_i = x)$, $(\Gamma^{(h)}, x) \in \Gamma \times X^2$, случайной векторной последовательности вида $\{(\Gamma_i, \kappa_i);\ i = 0, 1, \ldots\}$. Для любого $i \geq 0$, $h = 1, 2, \ldots, 8$, $x \in X^2$ введем обозначение $Q_i^{(h)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(h)}, \kappa_i = x)$. Для всех $(\Gamma^{(h)}, x) \in G_1 \bigcup G_2$ при $i > 0$ вероятности $\mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(h)}, \kappa_i = x)$ равны нулю. Поэтому необходимо определить рекуррентных соотношений только для состояний из класса G_0. Приведем некоторые из найденных соотношений.

Ради сокращения записи при $w = (w_1, w_2) \in X^2$ приведем формулы только для $Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)$ и для $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w)$, так как остальные рекуррентные соотношения имеют аналогичный вид. Для этого при $j, s = 1, 2, j \neq s$ введем следующие функции:

$$\varphi_{3j-2}(w)=P_1(T_{3j-2},w_1)P_2(T_{3j-2},w_2),$$

$$\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w)=w_j(w_1+w_2)^{-1}P_1(T_{3j-2},w_1)P_2(T_{3j-2},w_2),$$

$$\varphi_{3j,j}(w)=w_j(w_1+w_2)^{-1}P_1(T_{3j},w_1)P_2(T_{3j},w_2),$$

$$\varphi_{3j,s}(w)=w_s(w_1+w_2)^{-1}P_1(T_{3j},w_1)P_2(T_{3j},w_2),$$

$$\varphi_{3j}(w)=P_1(T_{3j},w_1)P_2(T_{3j},w_2).$$

Необходимо для вероятностей $Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)$ рассмотреть четыре случая, в которых рекуррентные соотношения будут различны.

1) Пусть $w_j > 0$ и $w_s = 0$. Тогда имеет место:

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_jy_j)=\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}((w_j-x_j)y_j)+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s,j}(w_jy_j)+$$
$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}}Q_i^{(3j)}(x)\varphi_{3j,j}(w_jy_j)+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}}Q_i^{(3j)}(x)\varphi_{3j,j}((w_j-l_{3j})y_j).$$

2) Если $w_j > 0$ и $w_s \leq K_s - l_{3s}$, то

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)=\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x_jy_j)+\sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x+l_{3s})+$$
$$+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}}Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\varphi_{3s,j}(w)+\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1,w_s+l_{3s}\}}Q_i^{(3s)}(x_sy_s)\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_s)y_s)+$$
$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j}}Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\varphi_{3j,j}(w)+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1,w_j+l_{3j}\}}Q_i^{(3j)}(x_jy_j)\varphi_{3j,j}(w+(l_{3j}-x_j)y_j).$$

3) При $w_j > 0$ и $w_s \ge K_s - l_{3s}$ получаем:

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w) = \sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w - x_j y_j) + \sum_{x_j=1}^{w_j}\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w - x + l_{3s} y_s) +$$

$$+\sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s}(w + (l_{3s} - x_s) y_s) + \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,j}(w) +$$

$$+\sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\min\{K_s-1, w_s+l_{3s}\}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,j}(w + (l_{3s} - x_s) y_s) + \sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)\varphi_{3j,j}(w) +$$

$$+\sum_{x_j=l_{3j}+1}^{\min\{K_j-1, w_j+l_{3j}\}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j)\varphi_{3j,j}(w + (l_{3j} - x_j) y_j).$$

4) Наконец, если $w_j = 0$ и $w_s \ge K_s - l_{3s}$, то

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_s y_s) = \sum_{x_s=K_s}^{w_s+l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s)\varphi_{3s,s}((w_s - x_s + l_{3s}) y_s).$$

Теперь найдем выражения для $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w)$, $w \in X^2$. Рассмотрим 2 случая.

1) $w_j = 0$;

$$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w_s y_s) = \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) +$$

$$+\sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j}\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s).$$

2) $w_j > 0$;

$$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w) = \sum_{x_j=0}^{w_j+l_{3j-2}}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x)\varphi_{3j-2}(w - x + l_{3j-2} y_j) +$$

$$+\sum_{x_j=0}^{w_j+l_{3j-2}-1}\sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x)\varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2} y_j).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zorine, A. V.* Optimization of Control of Doubly Stochastic Nonordinary Flows in Time-Sharing Systems / A. V. Zorine, M. A. Fedotkin // Automation and Remote Control. 2005. V. 66. № 7. P. 1115–1124.

2. *Федоткин, М. А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками / М. А. Федоткин, Е. В. Пройдакова // Автоматика и телемеханика. РАН. 2008. № 6. С. 96–106.

3. *Федоткин, М. А.* Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко – Коваленко / М. А. Федоткин, А. М. Федоткин // Автоматика и телемеханика. РАН. 2009. № 12. С. 92–108.

4. *Кузнецов, Н. Ю.* Моделирование конфликтных транспортных потоков / Н. Ю. Кузнецов, М. А. Федоткин // Кибернетика и системный анализ. НАН Украины. 2013. № 6. С. 32–39.

5. *Федоткин, М. А.* Построение и исследование математической модели неоднородного дорожного трафика./ М. А. Федоткин, Е. В. Кудрявцев // Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference "Modern Probabilistic Methods for Analysis und Optimization of Information and Telecommunication Networks". Minsk, 2011. № 21. P. 76–81.