РАСЧЕТ ТАРИФОВ ДЛЯ НЕЦЕЛОГО ВОЗРАСТА ЗАСТРАХОВАННОГО ЛИЦА И НЕЦЕЛОГО СРОКА ДЕЙСТВИЯ ДОГОВОРА СТРАХОВАНИЯ ЖИЗНИ

Е. Г. Красногир

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: krasnahir@bsu.by

Рассматривается вопрос вычисления нетто-тарифов в страховании жизни для нецелого возраста застрахованного лица и нецелого срока действия договора страхования при использовании предположения о равномерном распределении смертей внутри годичного возрастного интервала.

Ключевые слова: страхование жизни, нетто-тариф, нетто-резерв, равномерное распределение смертей.

ВВЕДЕНИЕ

Основным источником средств для страховой компании являются взносы (премии), уплачиваемые за страхование. Размер страхового взноса исчисляется на основании нетто-тарифа (нетто-тариф – это страховой взнос по договору страхования, предусматривающему выплату одной денежной единицы при наступлении страхового случая).

В данной работе рассматривается срочное страхование жизни, когда в качестве страхового случая выступает смерть застрахованного лица в течение срока действия договора страхования.

Когда возраст застрахованного лица на момент начала действия договора страхования и срок действия договора являются натуральными числами, величина нетто-тарифа может быть рассчитана стандартными методами (см., например, [1]) на основе статистических данных в виде таблиц жизни (таблиц смертности), полученных для региона, в котором будет проводиться страхование, пола и рода деятельности застрахованных лиц и т.д. (см., например, [2]). Однако на практике случаи, когда договор страхования начинает действовать в день рождения застрахованного, являются редкими. Также и срок действия договора не обязательно является натуральным числом. Например, часто договор заключается на срок до достижения застрахованным лицом пенсионного возраста. Поэтому возникает необходимость расчета нетто-тарифов для нецелого возраста застрахованного лица и (или) нецелого срока действия договора страхования. Точность расчета становится особенно важной в случае, когда в течение срока действия договора достаточно часто приходится пересчитывать нетто-тариф в связи с изменением каких-либо условий страхования (размера уплачиваемых взносов или страховой выплаты, процентной ставки, периодичности уплаты взносов и т.д.). Если пренебречь точностью при расчете тарифа, в процессе частых пересчетов может накопиться большая вычислительная погрешность, приводящая к убыткам для одной из сторон по договору. В данной работе на основе эквивалентности [3, с. 162] между настоящей стоимостью ожидаемых нетто-премий и настоящей стоимостью ожидаемой страховой выплаты осуществлен точный расчет нетто-тарифов по страхованию жизни в предположении о равномерном распределении смертей внутри годичного возрастного интервала [3, с. 82]. Премии могут уплачиваться единовременно за весь срок действия договора или ежегодно равными платежами.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ПРЕДСТОЯЩЕЙ ЖИЗНИ ЗАСТРАХОВАННОГО ЛИЦА

Пусть X – случайная величина продолжительности предстоящей жизни лица возраста 0 (т.е. новорожденного), имеющая функцию распределения $F(x)$. Соответственно, продолжительность предстоящей жизни лица возраста x, $X - x$, обозначим через $T(x)$.

Условная вероятность того, что новорожденный умрет в возрасте между x и $x + t$ при условии, что он доживает до возраста x, равна

$$P\{x < X \le x+t \,|\, X > x\} = \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}.$$

Соответственно, вероятность противоположного события:

$$P\{X > x+t \,|\, X > x\} = P\{X - x > t \,|\, X - x > 0\} = P\{T(x) > t \,|\, T(x) > 0\} =$$
$$= P\{T(x) > t\} = 1 - \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}. \quad (1)$$

Введем обозначения:

${}_t q_x = P\{T(x) \le t\}$ – вероятность того, что лицо возраста x умрет в течение ближайших t лет, $t \ge 0$;

${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = P\{T(x) > t\}$ – вероятность того, что лицо возраста x достигнет возраста $x + t$ лет, $t \ge 0$.

В частном случае, когда $t = 1$, будем записывать ${}_1 q_x = q_x$, ${}_1 p_x = p_x$.

Из (1) следует, что

$${}_t p_x = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}. \quad (2)$$

Вычислим ${}_{a+b} p_x$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, используя (2):

$${}_{a+b} p_x = \frac{1-F(x+a+b)}{1-F(x)} = \frac{1-F(x+a)}{1-F(x)} \cdot \frac{1-F((x+a)+b)}{1-F(x+a)} = {}_a p_x \cdot {}_b p_{x+a}. \quad (3)$$

Исходя из определения, ${}_t q_x$ – функция распределения случайной величины $T(x)$. Тогда плотность распределения случайной величины $T(x)$ будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}({}_t q_x) = \frac{d}{dt}(1 - {}_t p_x) = \frac{F'(x+t)}{1-F(x)} = \frac{1-F(x+t)}{1-F(x)} \cdot \frac{F'(x+t)}{1-F(x+t)} = {}_t p_x \mu_{x+t}. \quad (4)$$

В данной работе все результаты будут получены при следующих предположениях.

Предположение 1. Величина $x \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ – целая часть возраста застрахованного лица на момент начала действия договора страхования; s, $0 \le s < 1$, – дробная часть возраста застрахованного лица на момент начала действия договора страхования; $n > 0$ – срок, на который заключается договор страхования. Все величины измеряются в годах.

Предположение 2. Распределение моментов смерти внутри каждого годичного возрастного интервала является равномерным, т.е.

$$F(x + s) = (1 - s)F(x) + sF(x + 1), \quad x \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}, \quad 0 \le s < 1.$$

В условиях предположений 1 и 2 [3, с. 83]

$$ {}_t q_x = t q_x,\ \ 0 \le t \le 1, \tag{5}$$

$$ {}_t p_x\, \mu_{x+t} = q_x,\ \ 0 < t < 1. \tag{6}$$

РАСЧЕТ НАСТОЯЩЕЙ СТОИМОСТИ ОЖИДАЕМОЙ СТРАХОВОЙ ВЫПЛАТЫ

Пусть i – величина дохода, получаемого от инвестирования денежной суммы размера 1 на один год. Тогда $\nu^t = 1/(1 + i)^t$ – дисконтирующий множитель, показывающий, какую денежную сумму необходимо инвестировать сейчас по процентной ставке i, чтобы спустя время t получить сумму размера 1.

Рассмотрим договор страхования, заключенный на срок n лет в отношении лица возраста $x + s$ лет на момент начала действия договора и предусматривающий выплату страхового возмещения в размере 1 в момент смерти. Используя (4), вычислим настоящую (на момент начала действия договора) стоимость ожидаемой страховой выплаты:

$$\bar{A}^1_{x+s:\overline{n|}} = E\{\nu^{T(x+s)}\} = \int_0^n \nu^t\, {}_t p_{x+s}\mu_{x+s+t}dt .$$

Согласно (3), ${}_{t+s}p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s}$. Поэтому

$$\bar{A}^1_{x+s:\overline{n|}} = \frac{1}{{}_s p_x}\int_0^n \nu^t\, {}_{t+s}p_x\mu_{x+s+t}dt = [t+s=y] = \frac{1}{{}_s p_x}\int_s^{n+s} \nu^{y-s}\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy =$$

$$= \frac{1}{{}_s p_x \nu^s}\left[\int_0^{[n+s]} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy + \int_{[n+s]}^{n+s} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy - \int_0^{s} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy\right], \tag{7}$$

где $[a]$ – целая часть числа a.

Первое слагаемое в выражении (7) – функция от x и $[n + s]$, которые являются целыми, поэтому [3, с. 112, с. 123]

$$\int_0^{[n+s]} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy = \bar{A}^1_{x:\overline{[n+s]|}} = -\frac{i}{\ln\nu}A^1_{x:\overline{[n+s]|}} = -\frac{i}{\ln\nu}\sum_{k=0}^{[n+s]-1}\nu^{k+1}\, {}_k p_x \cdot q_{x+k}\,,\quad A^1_{x:\overline{0|}} = 0\,. \tag{8}$$

Так как в третьем слагаемом (7) $0 < y < s < 1$, то согласно (6)

$$\int_0^{s} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy = q_x\int_0^s \nu^y dy = q_x\frac{\nu^s - 1}{\ln\nu}. \tag{9}$$

Далее, используя (3), получаем

$$\int_{[n+s]}^{n+s} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy = \int_{[n+s]}^{n+s} \nu^y\, {}_{[n+s]}p_x \cdot {}_{y-[n+s]}p_{x+[n+s]}\cdot\mu_{x+y}dy =$$

$$= [y-[n+s]=t] = {}_{[n+s]}p_x\nu^{[n+s]}\int_0^{n+s-[n+s]} \nu^t\, {}_t p_{x+[n+s]}\cdot\mu_{x+t+[n+s]}dt\,.$$

Здесь $0 < t < n + s – [n + s] < 1$. Поэтому при равномерном распределении смертей внутри годичного возрастного интервала

$$\int_{[n+s]}^{n+s} \nu^y\, {}_y p_x\mu_{x+y}dy = {}_{[n+s]}p_x\nu^{[n+s]}q_{x+[n+s]}\int_0^{n+s-[n+s]}\nu^t dt = {}_{[n+s]}p_x\nu^{[n+s]}q_{x+[n+s]}\frac{\nu^{n+s-[n+s]}-1}{\ln\nu} =$$

$$= {}_{[n+s]}p_x \cdot q_{x+[n+s]}\frac{\nu^{n+s}-\nu^{[n+s]}}{\ln\nu}. \tag{10}$$

В итоге из (5), (7) – (10) получаем следующее выражение для настоящей стоимости выплаты страхового возмещения в размере 1 в момент смерти застрахованного лица:

$$\bar{A}^1_{x+s:\overline{n}|} = \frac{1}{(1-sq_x)\nu^s}\left[-\frac{i}{\ln\nu}A^1_{x:\overline{[n+s]}|} + {}_{[n+s]}p_x \cdot q_{x+[n+s]}\frac{\nu^{n+s}-\nu^{[n+s]}}{\ln\nu} - q_x\frac{\nu^s-1}{\ln\nu}\right]. \qquad (11)$$

С учетом (8) все величины в (11) могут быть вычислены непосредственно из таблицы жизни.

Заметим также, что согласно принципу эквивалентности при единовременной уплате (в момент начала действия договора) страхового взноса страховой нетто-тариф будет равен $\bar{A}^1_{x+s:\overline{n}|}$.

РАСЧЕТ НАСТОЯЩЕЙ СТОИМОСТИ ОЖИДАЕМЫХ НЕТТО-ПРЕМИЙ

Пусть нетто-премия по договору страхования уплачивается m равными ежегодными платежами ($m \le [n] + 1$) в начале каждого года действия договора страхования (т.е. в возрасте $x + s$, $x + s + 1$, $x + s + 2$, …, $x + s + m - 1$) при условии, что застрахованное лицо живо на момент уплаты. Размер каждого платежа B_1 денежных единиц. Тогда настоящая (на момент начала действия договора) стоимость нетто-премий [3, с. 141] имеет вид:

$$B_1 \cdot Y = \begin{cases} B_1 \cdot \ddot{a}_{\overline{[T(x+s)]+1}|}, & 0 \le [T(x+s)] < m, \\ B_1 \cdot \ddot{a}_{\overline{m}|}, & [T(x+s)] \ge m. \end{cases}$$

Соответственно, настоящая стоимость ожидаемых нетто-премий вычисляется как

$$B_1 \cdot \ddot{a}_{x+s:\overline{m}|} = E\{B_1 \cdot Y\} = B_1\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\, {}_k p_{x+s}\,. \qquad (12)$$

Преобразуем данное выражение. Воспользуемся формулой (3): ${}_{k+s}p_x = {}_s p_x \cdot {}_k p_{x+s}$, ${}_{k+s}p_x = {}_k p_x \cdot {}_s p_{x+k}$. Тогда с учетом (5)

$$\ddot{a}_{x+s:\overline{m}|} = \frac{1}{{}_s p_x}\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_{k+s}p_x = \frac{1}{{}_s p_x}\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x \cdot {}_s p_{x+k} = \frac{1}{{}_s p_x}\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x \cdot (1-sq_{x+k}) =$$

$$= \frac{1}{{}_s p_x}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x - s\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x \cdot q_{x+k}\right] = \frac{1}{{}_s p_x}\left[\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x - s\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x(1-p_{x+k})\right] =$$

$$= \frac{1}{{}_s p_x}\left[(1-s)\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x + s\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x \cdot p_{x+k}\right] = \frac{1}{{}_s p_x}\left[(1-s)\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x + s\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_{k+1}p_x\right] =$$

$$= \frac{1}{{}_s p_x}\left[(1-s)\sum_{k=0}^{m-1}\nu^k\,{}_k p_x + s\sum_{l=1}^{m}\nu^{l-1}\,{}_l p_x\right] = \frac{1}{1-sq_x}\left[(1-s)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \frac{s}{\nu}(\ddot{a}_{x:\overline{m+1}|}-1)\right]. \qquad (13)$$

Все величины в (13) могут быть вычислены непосредственно из таблицы жизни.

ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РАСЧЕТА НЕТТО-ТАРИФА И ВЫБОР СРОКА УПЛАТЫ ПРЕМИИ

Когда настоящая стоимость ожидаемой страховой выплаты по договору страхования равна $\bar{A}^1_{x+s:\overline{n}|}$, а настоящая стоимость ожидаемых нетто-премий имеет вид $E\{B_1 \cdot Y\}$, тогда согласно принципу эквивалентности

$$E\{B_1 \cdot Y\} = \overline{A}^1_{x+s:\overline{n}|}, \tag{14}$$

где величина B_1 и является нетто-тарифом по договору страхования.

Из (14) с учетом (11) – (13) получаем

$$B_1 = \frac{\overline{A}^1_{x+s:\overline{n}|}}{E\{Y\}} = \frac{\dfrac{1}{\nu^s}\left[-\dfrac{i}{\ln\nu}A^1_{x:\overline{[n+s]}|} + {}_{[n+s]}p_x \cdot q_{x+[n+s]}\dfrac{\nu^{n+s} - \nu^{[n+s]}}{\ln\nu} - q_x\dfrac{\nu^s - 1}{\ln\nu}\right]}{(1-s)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \dfrac{s}{\nu}(\ddot{a}_{x:\overline{m+1}|} - 1)}, \quad m \le [n] + 1. \tag{15}$$

В частном случае $m = 1$ выражение (15) будет иметь вид (11).

Правильность расчета тарифа на практике проще всего проверить с помощью нетто-резерва – величины, позволяющей сравнивать настоящую (на некоторый момент времени в течение срока страхования) стоимость будущих выплат страхового возмещения и настоящую (на тот же момент времени) стоимость будущих нетто-взносов.

Пусть R_k – резерв по истечению $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ лет с момента начала действия договора страхования (до момента поступления очередного взноса). Очевидно, что в момент истечения срока действия страхования на срок n лет на случай смерти резерв будет равен нулю. Поэтому нетто-тариф должен быть рассчитан таким образом, чтобы $R_n = 0$.

Резерв по истечению $k + t$ лет с момента начала действия договора страхования ($k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $0 < t \le 1$) может быть получен из равенства ожидаемых настоящих стоимостей финансовых ресурсов страховщика и ожидаемых настоящих стоимостей его обязательств [3, с. 198]:

$$R_{k+t}\nu^t \cdot {}_t p_{x+s+k} = R_k + B_1 - \overline{A}^1_{x+s+k:\overline{t}|}, \text{ если } k \le m-1,$$

$$R_{k+t}\nu^t \cdot {}_t p_{x+s+k} = R_k - \overline{A}^1_{x+s+k:\overline{t}|}, \text{ если } k > m-1,$$

$$R_0 = 0.$$

Вычислим входящую в данные выражения величину ${}_t p_{x+s+k}$. Из (3) следует

$${}_t p_{x+s+k} = \frac{{}_{t+s} p_{x+k}}{{}_s p_{x+k}}.$$

Если $s + t \le 1$, то

$${}_t p_{x+s+k} = \frac{1-(s+t)q_{x+k}}{1-sq_{x+k}}.$$

Если $s + t > 1$, то

$${}_{s+t} p_{x+k} = p_{x+k} \cdot {}_{s+t-1}p_{x+k+1}.$$

С учетом этого

$${}_t p_{x+s+k} = \frac{p_{x+k} \cdot {}_{s+t-1}p_{x+k+1}}{{}_s p_{x+k}} = \frac{(1-q_{x+k})(1-(s+t-1)q_{x+k+1})}{1-sq_{x+k}}.$$

В итоге получаем следующую рекуррентную формулу для резерва ($k \le m - 1$):

$$R_{k+t} = \begin{cases} \dfrac{R_k + B_1 - \overline{A}^1_{x+s+k:\overline{t}|}}{\nu^t} \cdot \dfrac{1-sq_{x+k}}{1-(s+t)q_{x+k}}, & s+t \le 1; \\[2ex] \dfrac{R_k + B_1 - \overline{A}^1_{x+s+k:\overline{t}|}}{\nu^t} \cdot \dfrac{1-sq_{x+k}}{(1-q_{x+k})(1-(s+t-1)q_{x+k+1})}, & s+t > 1. \end{cases} \tag{16}$$

Для случая $k > m - 1$ в (16) следует взять $B_1 = 0$.

Пример. Рассмотрим договор страхования, заключаемый в отношении лица возраста 30,75 лет на срок до достижения им возраста 35 лет. Соответственно, договор будет действовать 4,25 лет. Страховой взнос уплачивается в начале каждого года действия договора равными частями. Договор предусматривает выплату страхового возмещения в момент смерти застрахованного лица. Процентная ставка 4% годовых.

Необходимые статистические данные взяты из [2, с. 11]. На рис. 1 и рис. 2 представлены графики функций $R(y)$ (16), $y = k + t$, для рассматриваемого примера.

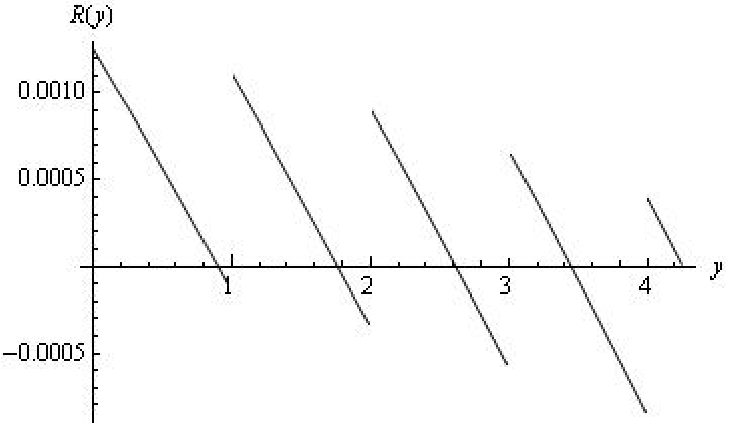

Рис. 1. Нетто-резерв для тарифа B_1, вычисленного по (15) при $m = 5$

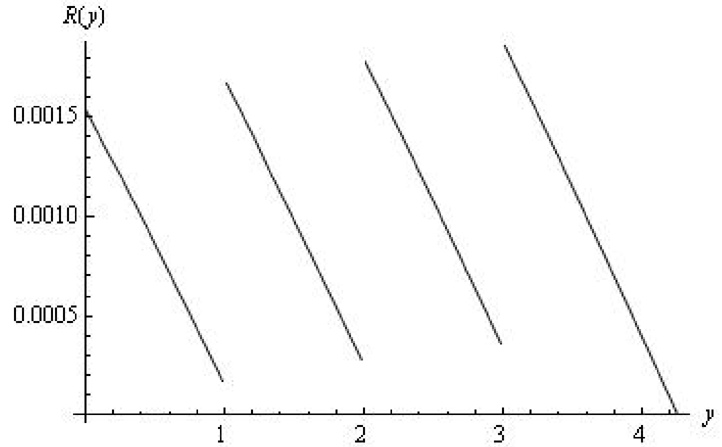

Рис. 2. Нетто-резерв для тарифа B_1, вычисленного по (15) при $m = 4$

Таким образом, нетто-тариф, рассчитанный по формуле (15), приводит к тому, что резерв в момент окончания срока страхования становится нулевым. Однако в первом случае ($m = 5$) резерв принимает отрицательные значения, что указывает на недостаточность полученной страховщиком суммы страховых взносов для покрытия ожидаемых потерь.

Поэтому при расчете страхового тарифа для нецелого срока страхования целесообразно выбирать m таким образом, чтобы резерв все время оставался неотрицательным. В качестве одного из вариантов можно предложить комбинацию из двух последовательно действующих договоров страхования: первый – на срок $[n]$ лет с ежегодной уплатой взносов, а второй – на оставшийся срок $(n - [n])$ лет с единовременной уплатой взноса. Тарифы по каждому из договоров могут быть рассчитаны по формуле (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Об утверждении Методики расчета страховых тарифов по страхованию жизни и дополнительной пенсии: приказ Комитета по надзору за страховой деятельностью при Министерстве финансов Республики Беларусь, 18 дек. 1998 г., № 80.

2. *Arias, E.* United States Life Tables, 2010 / E. Arias // National Vital Statistics Reports. 2014. V. 63, № 7.

3. *Бауэрс, Н.* Актуарная математика / Н. Бауэрс [и др.]. М. : Янус-К, 2001. 656 с.