ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ТАНДЕМА СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ С ПРОДЛЕНИЕМ

В. М. Кочеганов*, **А. В. Зорин****

Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия
*E-mail: *kocheganov@gmail.com, **zoav1602@gmail.com*

Рассматривается тандем из двух конфликтных систем массового обслуживания с не мгновенным перемещением требований между приборами. В первой системе управление осуществляется по циклическому алгоритму, а во второй системе применяется циклический алгоритм с продлением. С использованием кибернетического подхода построено вероятностное пространство, на котором определены все случайные величины и элементы, описывающие блоки управляющей системы. Доказана марковость многомерной стохастической последовательности, описывающей изменение состояния обслуживающего устройства и флуктуации длин очередей.

Ключевые слова: тандем перекрестков, управляющая конфликтная система массового обслуживания, не мгновенное перемещение требований в сети.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при построении математических моделей сетей массового обслуживания и тандемов в частности применяется описательный подход. При таком подходе задание входных потоков и алгоритмов обслуживания производится на содержательном уровне, законы распределения длительностей обслуживания требований считаются известными и задаются с помощью интегральной функции распределения времени обслуживания произвольного требования. При этом не удается решить проблему изучения выходящих потоков из узлов, а также рассмотреть сети с не мгновенным перемещением требований между узлами и с зависимыми, разнораспределенными длительностями обслуживания требований.

В настоящей работе применяется новый подход к построению вероятностных моделей тандемов конфликтных систем массового обслуживания с различными алгоритмами управления в узлах. В рамках этого подхода удается решить проблему выбора описаний ω элементарных исходов случайного эксперимента и математически корректно определить случайный процесс, описывающий эволюцию рассматриваемой системы, а также решить перечисленные выше частные задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА СОДЕРЖАТЕЛЬНОМ УРОВНЕ

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (рис. 1). Пусть в систему с одним обслуживающим устройством поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4. Требо-

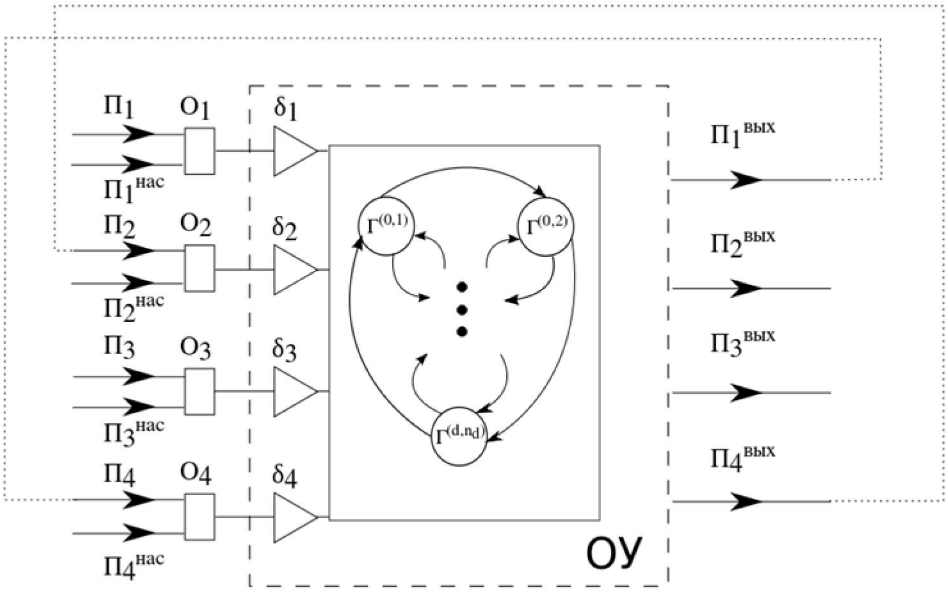

Рис. 1. Структурная схема системы обслуживания

вания по потоку $П_j$ становятся в соответствующую очередь O_j с неограниченной вместимостью, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для $j \in \{1, 2, 3\}$ дисциплина очереди O_j, поддерживаемая устройством δ_j, имеет тип FIFO (First In First Out). Таким образом, для обслуживания из соответствующей очереди выбирается то требование, которое пришло раньше. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Будем предполагать, что входные потоки $П_1$ и $П_3$ формируются внешней средой, которая имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Требования потоков $П_1$ и $П_3$ формируют независимые между собой неординарные пуассоновские потоки. Интенсивности соответствующих простейших потоков для $П_1$ и $П_3$ будем обозначать λ_1 и λ_3, а распределение числа заявок в группе по потоку $П_j$ будем описывать производящей функцией.

$$f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu , \tag{1}$$

которая предполагается аналитической при $|z| < (1 + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Величина $p_\nu^{(j)}$ определяет вероятность того, что по потоку $П_j$ число требований в группе равно ν, $j \in \{1, 3\}$. Обслуженные требования потока $П_1$ поступают на повторное обслуживание, формируя при этом поток $П_4$. Потоки $П_2$ и $П_3$ являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

В каждый момент времени обслуживающее устройство находится в одном из конечного множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)}: k = 0, 1, \ldots, d; r = 1, 2, \ldots, n_k\}$ с заданными натуральными числами $d, n_0, n_1, \ldots, n_d$. В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Введем множества Γ^{I}, Γ^{II}, Γ^{III} и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{I}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{II}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{III}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4. В состоянии $\gamma \in \Gamma^{IV}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4. Итак, множество Γ представлено в виде объединения $\Gamma = \Gamma^{I} \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^1\Gamma = \Gamma^{I} \cup \Gamma^{III}$, ${}^2\Gamma = \Gamma^{I} \cup \Gamma^{II}$, ${}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = 1, 2, \ldots, n_k\}$ будем называть k-м циклом, $k = 1, 2, \ldots, d$. При $k = 0$ состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = 0, 1, \ldots, n_0$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r < n_k$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k$, $k = 0, 1, \ldots, d$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^O выходных состояний, подмножество C_k^I входных состояний и подмножество $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$ того же цикла C_k. При состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, принадлежащем множеству C_k^O, прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L. В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L, новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ – заданное отображение множества $\cup_{k=1}^{d} C_k^O$ во множество $\{1, 2, \ldots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L, где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ – заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на себя; в противном случае, включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ – заданное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n_0\}$ на множество $\cup_{k=1}^{d} C_k^I$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^O \subseteq {}^2\Gamma$ и $C_k^I \subseteq {}^3\Gamma$.

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, x) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}, & \text{если} \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{O}; \\ \Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}, & \text{если} \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{O} \text{ и } x > L; \\ \Gamma^{(k,h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если} \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{O} \text{ и } x \le L; \\ \Gamma^{(0,h_2(r))}, & \text{если} \quad k = 0 \text{ и } x \le L; \\ h_3(r), & \text{если} \quad k = 0 \text{ и } x > L. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут быть зависимыми и иметь различные законы распределения, поэтому вместо классического способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, определяется как виртуальный выходной поток при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j \in \{1, 2, 3\}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ будет содержать неслучайное число $\ell_{k,r,j}$ требований, обслуженных в течение времени $T^{(k,r)}$, если $\Gamma^{(k,r)} \in {}^j\Gamma$, и будет содержать 0 требований если $\Gamma^{(k,r)} \notin {}^j\Gamma$. Пусть Z_+ – множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in Z_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований.

Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1 - p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков. В роли потоков требований, формируемых внешней средой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1, Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1, проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью (а именно, с вероятностью $p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения. Движение на обоих перекрестках возможно только в прямом направлении, поэтому поток Π_5 не представляет интереса для более глубокого изучения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\tilde{T}^{(1,1)}$ (“зеленый” свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ – простаивают в течение времени $\tilde{T}^{(1,2)}$ (“красный” свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_3 (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $g_{2,2}$ и $g_{2,3}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3, а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L. Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\tilde{T}^{(2,1)}$, $\tilde{T}^{(2,2)}$ и $\tilde{T}^{(2,3)}$. Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как кибернетическая управляющая система обслуживания (см. [1, 2]). Схема управляющей системы приведена на рис. 1. На схеме присутствуют следующие блоки: 1) внешняя среда с одним состоянием; 2) входные полюса первого типа – входные потоки Π_1, Π_2, Π_3, Π_4; 3) входные полюса второго типа – потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}$, $\Pi_2^{\text{нас}}$, $\Pi_3^{\text{нас}}$, $\Pi_4^{\text{нас}}$; 4) внешняя память – очереди O_1, O_2, O_3, O_4; 5) устройство по переработке информации внешней памяти – устройства по поддержанию дисциплины очереди δ_1, δ_2, δ_3, δ_4; 6) внутренняя память обслуживающего устройства – обслуживающее устройство (ОУ); 7) устройство по переработке информации во внутренней памяти – граф смены состояний; 8) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}$, $\Pi_2^{\text{вых}}$, $\Pi_3^{\text{вых}}$, $\Pi_4^{\text{вых}}$. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Для задания информации блоков введем следующие величины и элементы, а также укажем множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ моментов смены состояний обслуживающего устройства. Обозначим Γ_i из множества Γ состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$, количество $\kappa_{j,i} \in Z_+$ требований в очереди O_j в момент времени τ_i, количество $\eta_{j,i} \in Z_+$ требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\xi_{j,i} \in Z_+$ требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, количество $\overline{\xi}_{j,i} \in Z_+$ реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \kappa_{3,i}), \tag{3}$$

где отображение $h(\cdot, \cdot)$ определено в (2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \kappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \text{ где } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \kappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{4}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\kappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\kappa_{j,i+1} = \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из (4) следует соотношение

$$\kappa_{j,i+1} = \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \tag{5}$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1) следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \kappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \qquad \kappa_{4,i+1} = \kappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \qquad \xi_{4,i} = \kappa_{4,i}. \tag{6}$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i\}; i \geq 0\}$ при фиксированных значениях метки $\nu_i = (\Gamma_i; \kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_{3,i}, \kappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot, \cdot)$, $\varphi_3(\cdot, \cdot)$ из разложений

$$\sum_{x=0}^{\infty} z^x \varphi_j(x, t) = \exp(\lambda_j t(f_j(z) - 1)),$$

где $f_j(z)$ определены в (1), $j \in \{1, 3\}$. Функция $\varphi_j(x, t)$, есть вероятность поступления $x = 0, 1, \ldots$ требований по потоку Π_j за время $t \geq 0$. Функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k; x, u) = C_x^k u^k (1-u)^{x-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k, x, u)$ выражает вероятность поступления k требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит x требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u = p_{k,r}$.

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in Z_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\nu = (\Gamma^{(k,r)}; x_1, x_2, x_3, x_4)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_2, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_2(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1 + a_1\}}, \tag{7}$$

где $0 \leq a_2 \leq x_2$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера, принимающий значение 1 при $i = j$ и значение 0 при $i \neq j$, и для $j \in \{1, 2, 3\}$ положим, по определению,

$$\tilde{\ell}(k,r,j)=\begin{cases}\ell_{k,r,j}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)}\in {}^j\Gamma,\\ 0, & \text{если } \Gamma^{(k,r)}\notin {}^j\Gamma.\end{cases}$$

Пусть $b=(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4)$. Из содержательной постановки задачи следует, что вероятность $\zeta\,(b,\ k,\ r,\ x)$ выполнения равенств $\xi_{1,i}=b_1$, $\xi_{2,i}=b_2$, $\xi_{3,i}=b_3$, $\xi_{4,i}=b_4$ при фиксированном значении метки $\nu=(\Gamma^{(k,r)};\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ есть

$$\delta_{b_1,\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},1)}\times\delta_{b_2,\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},2)}\times\delta_{b_3,\tilde{\ell}(\tilde{k},\tilde{r},3)}\times\delta_{b_4,x_4}\,. \tag{8}$$

Из формулы (8) следует для $j\in\{1,\ 2,\ 3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i}=0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)},\ x_3)\notin {}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i}=\ell_{\tilde{k},\tilde{r},j}$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}=$ $=h(\Gamma^{(k,r)},x_3)\ \in {}^j\Gamma$.

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором общем вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ \mathbf{P}(\cdot))$.

Теорема 1. Пусть $\gamma_0=\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$ и $x_0=(x_{1,0},x_{2,0},x_{3,0},x_{4,0})\in Z_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega,\ F,\ \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i}=\eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i}=\xi_{j,i}(\omega)$, $\overline{\xi}_{j,i}=\overline{\xi}_{j,i}(\omega)$, $\kappa_{j,i}=\kappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i=\Gamma_i(\omega)$, $i=0$, $j\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, такие что: 1) имеют место равенства $\Gamma_0(\omega)=\gamma_0$, $\kappa_0(\omega)=x_0$; 2) выполняются соотношения (3), (5), (6); 3) для любых $a\in Z_+^4$, $b\in Z_+^4$, $x^t\in Z_+^4$, $\Gamma^{(k_t,r_t)}\in\Gamma$, $t=0,\ 1,\ \ldots$ условное распределение векторов $\eta_i=(\eta_{1,i},\ \eta_{2,i},\ \eta_{3,i},\ \eta_{4,i})$, $\xi_i=(\xi_{1,i},\ \xi_{2,i},\ \xi_{3,i},\ \xi_{4,i})$ имеет вид

$$\mathrm{P}\left(\{\omega:\eta_i=a,\xi_i=b\}\,\middle|\,\bigcap_{t=0}^{i}\{\omega:\Gamma_t=\Gamma^{(k_t,r_t)},\ \kappa_t=x^t\}\right)=\varphi(a,k_i,r_i,x^i)\times\zeta(b,k_i,r_i,x^i),$$

где функции $\varphi\,(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot)$ и $\zeta\,(\cdot,\ \cdot,\ \cdot,\ \cdot)$ определяются формулами (7) и (8) соответственно.

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Ионеску Тулчи (см. [3]).

Теорема 2. Пусть $\Gamma_0=\Gamma^{(k,r)}\in\Gamma$ и $\kappa_0=(x_{1,0},x_{2,0},x_{3,0},x_{4,0})\in Z_+^4$ фиксированы. Тогда стохастическая последовательность $\{(\Gamma_i,\ \kappa_i);\ i\geq 0\}$ является однородной счетной многомерной цепью Маркова.

Работа выполнена при финансовой поддержке госбюджетной темы «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных и процессов принятия решений» (госрегистрация № 01201456585) и государственной программы «Поддержка ведущих университетов РФ в целях повышения их конкурентной способности среди ведущих мировых научно-образовательных центров»

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоткин, М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы / М. А. Федоткин // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М. : Наука, 1996. С. 51–70.

2. *Зорин, А. В.* Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским не мгновенным перемещением требований / А. В. Зорин // Теория вероятностей и математическая статистика. 2011. Вып. 84. С. 163–176.

3. *Ширяев, А. Н.* Вероятность: в 2-х кн. Кн. 1 / А. Н. Ширяев. М. : Наука. 2007. 552 с. (С. 348–351).