РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ

О. М. Китурко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Гродно, Беларусь
E-mail: sytaya_om@mail.ru

Проведено исследование стохастической модели прогнозирования ожидаемых доходов одной логистической транспортной системы. Рассмотрена задача оптимального управления для данной НМ-сети. Находится набор оптимальных стратегий управления, максимизирующих полный ожидаемый доход сети, для этого используется метод Ховарда.

Ключевые слова: логистическая транспортная система, НМ-сеть, метод Ховарда.

ВВЕДЕНИЕ

Распределительная деятельность требует существенных затрат (издержек) на их выполнение. Основная часть этих затрат связана с выполнением ключевых логистических операций: складированием, переработкой, транспортировкой, экспедированием, подготовкой продукции к производственному потреблению, сбором, хранением, обработкой и выдачей информации о заказах, запасах, поставках и т.д. Эти затраты по своему экономическому содержанию частично совпадают с издержками, возникающими в процессе производства, но в большей мере вызваны транспортно-складскими издержками, расходами на упаковку и тару, а также расходами, связанными с завозом товаров и их отправкой потребителям, и другими составляющими издержками обращения. Совокупные логистические издержки на локальном уровне определяются (и планируются) исходя из сумм продаж, в стоимостном выражении в расчете на единицу массы готовой продукции, предназначенной к реализации, или в процентах от стоимости чистой продукции.

Для логистических транспортных систем (ЛТС) важными задачами являются задачи оценки и прогнозирования доходов их субъектов, получаемых от перевозки продукции различными видами транспорта между субъектами. Для решения таких задач был введен в рассмотрение класс сетей МО – марковские сети с доходами, называемых в последнее время НМ (Howard – Matalytski)-сетями [1], которые можно использовать при прогнозировании доходов различных систем, не обязательно логистических.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим замкнутую марковскую НМ-сеть с однотипными заявками, состоящую из n однолинейных систем массового обслуживания (СМО) S_i, $i = \overline{1,n}$, изображенную на рис. 1, которая является моделью транспортировки некоторого товара. В данной модели система S_n – это «склад» (распределительный центр), на котором осуществляется хранение данного товара, S_1, S_2, …, S_{n-1} – «пункты реализации товара» (магазины), в которые товар поступает со склада S_n. При этом под заявкой понимается перевозка товара в логистической системе «склад – пункты реализации товара».

Распределительный центр S_n снабжает продукцией сеть магазинов S_1, S_2, …, S_{n-1} согласно списка приоритетности (далее список), в котором пункт реализации товара S_1 имеет лидирующую позицию, а S_{n-1} – самый неприоритетный. Склад S_n загружает транспортное средство (ТС) продукцией для ряда магазинов согласно списка. Очевидно, что отгрузка для системы S_1 будет выполнена в первую очередь. Однако, если заявка для первого магазина будет меньше, чем объемная масса ТС, то автомобиль до загружается продукцией для следующим магазинов согласно списка, т.е. S_2, S_3, …, S_{n-1}. Если магазин S_1 не нуждается в пополнении продукции, то распределительный центр S_n выполняет заявку магазинов S_2, S_3, …, S_{n-1} и т.д. Если первые i магазинов не нуждаются в продукции распределительного центра, то обслуживаются магазины S_{i+1}, S_{i+2}, …, S_{n-1}, т.е. в данной сети существует схема поставки товара в пункты реализации в порядке $S_n \to S_{i_1} \to S_{i_2} \to \ldots \to S_{i_m} \to S_n$, где $1 \le m \le n-1$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$, $i_j \in \{1,2,\ldots,n-1\}$, $j = \overline{1,m}$.

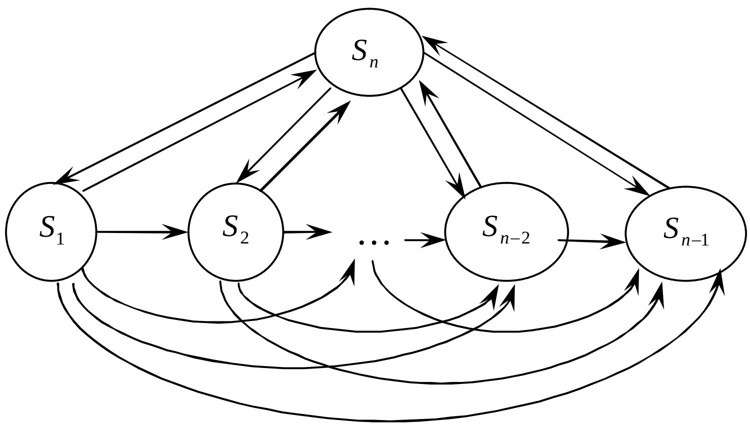

Рис. 1. Сетевая модель транспортировки товара

Под состоянием сети в момент времени t будем понимать вектор $(k,t) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, t)$, где k_i – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i = \overline{1,n}$. Число состояний сети равно $L = C_{n+K-1}^{n-1}$, где K – число заявок в сети.

НАХОЖДЕНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть $v_n(k,t)$ – полный ожидаемый доход, который получает система S_n за время t, если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k; $\mu_n(t)$ – интенсивность обслуживания заявок в n-ой системе в момент времени t. Через p_{ij} обозначим вероятность перехода заявок после обслуживания из системы S_i в систему S_j, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$; матрицу вероятностей переходов заявок между СМО данной НМ-сети можно записать в виде:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n-2} & p_{1n-1} & p_{1n} \\ 0 & 0 & p_{23} & \dots & p_{2n-2} & p_{2n-1} & p_{2n} \\ . & . & . & & . \ . & . \ . & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n-2n-1} & p_{n-2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn-2} & p_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть НМ-сеть находится в состоянии (k, t). Если она остается в этом состоянии в течение интервала времени Δt, то ожидаемый доход системы S_n уменьшиться на величину $r_n(k)\Delta t$, т.к. система S_n несет убыток (расходы на содержание транспортных средств, выплата заработной платы водителям, амортизация и др.) плюс ожидаемый доход $v_n(k,t)$, который она принесет за оставшиеся t единиц времени. Вероятность такого события равна $1-\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)\Delta t+o(\Delta t)$, где $u(x)=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x\le 0,\end{cases}$ – функция Хевисайда. Когда сеть за время Δt совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k-I_j+I_n, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_j(t)u(k_j)p_{jn}\Delta t+o(\Delta t)$, $j=\overline{1,n-1}$, т.е. транспортное средство возвращается пустым или возвратным товаром из «пунктов реализации» на «склад», следовательно, система S_n несет убыток (расходы на бензин, налоги, возврат бракованного товара и прочее). Ожидаемый доход системы, в таком случае, составит минус $r_{jn}(k-I_j+I_n,t)$ плюс ожидаемый доход $v_n(k-I_j+I_n,t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k-I_j+I_n,t)$, $j=\overline{1,n-1}$.

Когда сеть совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k+I_j-I_n, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_n(t)u(k_n)p_{nj}\Delta t+o(\Delta t)$, $j=\overline{1,n-1}$, т.е. транспортное средство осуществляет поставку товара со «склада» в «пункты реализации», соответственно, это приносит системе S_n доход в размере $r_{nj}(k+I_j-I_n,t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k+I_j-I_n)$, $j=\overline{1,n-1}$.

Когда сеть за время Δt совершает переход из состояния (k, t) в состояние $(k+I_c-I_s, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_s(t)u(k_s)p_{sc}\Delta t+o(\Delta t)$, т.е. транспортное средство поставляет товар в несколько «пунктов реализации» без возврата на «склад», ожидаемый доход системы S_n составит $-r_n(k)\Delta t$ за время Δt плюс ожидаемый доход $v_n(k+I_c-I_s,t)$, который будет получен за оставшееся время t, если бы начальным состоянием сети было $(k+I_c-I_s)$, $s<c$, $s=\overline{1,n-2}$, $c=\overline{2,n-1}$.

Тогда для ожидаемого дохода системы S_n, учитывая формулу полной вероятности для математического ожидания, можно записать систему разностных уравнений

$$v_n(k,t+\Delta t)=(1-\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)\Delta t)(-r_n(k)\Delta t+v_n(k,t))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_n(t)u(k_n)p_{nj}\Delta t(r_{nj}(k+I_j-I_n,t)+v_n(k+I_j-I_n,t))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)p_{jn}\Delta t(-r_{jn}(k-I_j+I_n,t)+v_n(k-I_j+I_n,t))+$$

$$+\sum_{c=2}^{n-1}\sum_{\substack{s=1\\s<c}}^{n-2}\mu_s(t)u(k_s)p_{sc}\Delta t(-r_n(k)\Delta t+v_n(k+I_c-I_s,t)),$$

или

$$V_n(k,t+\Delta t)=\widehat{Q}_n(k,\Delta t)+\widehat{A}_n(k,\Delta t)V_n(k,t)\,, \quad (1)$$

где $V_n(k,t)$ – вектор-столбец ожидаемых доходов центральной системы S_n за время t, если в начальный момент времени сеть находилась в состоянии k, состоящий из компонент $v_n(k,t)$, зависящих от состояний сети; $\widehat{A}_n(k,\Delta t)=\left\|\widehat{a}_{ij}(k,\Delta t)\right\|_{L\times L}$ – матрица вероятностей переходов между состояниями сети за время Δt, если начальным состоянием сети было состояние (k, t); а $\widehat{Q}_n(k,\Delta t)$ – вектор-столбец средних одношаговых доходов, получаемых системой S_n за время Δt, если в момент времени t состояние было(k, t).

Из системы (1) получается система РДУ:

$$\frac{dv_n(k,t)}{dt}=-r_n(k)-v_n(k,t)\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_n(t)u(k_n)p_{nj}(r_{nj}(k+I_j-I_n,t)+v_n(k+I_j-I_n,t))+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j(t)u(k_j)p_{jn}(-r_{jn}(k-I_j+I_n,t)+v_n(k-I_j+I_n,t))+$$

$$+\sum_{c=2}^{n-1}\sum_{\substack{s=1\\s<c}}^{n-2}\mu_s(t)u(k_s)p_{sc}v_n(k+I_c-I_s,t).$$

Эту систему в свою очередь можно свести к системе конечного числа неоднородных ОДУ.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Имеем конечное множество стратегий управления, определяющих соответствующие матрицы вероятностей переходов заявок между СМО сети и одношаговых доходов для каждого состояния сети [2]. Пусть $\Theta_l=\{\theta_l\}$ – множество стратегий управления в l-м состоянии. Вектор стратегий $\overline{\theta}=(\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2,...,\overline{\theta}_L)\in\Theta_1\times\Theta_2\times...\times\Theta_L$ называется политикой. Если стратегия θ_l или политика $\overline{\theta}$ выбираются в момент времени t, то пишем $\theta_l(t)$ или $\overline{\theta}(t)=(\overline{\theta}_1(t),\overline{\theta}_2(t),...,\overline{\theta}_L(t))$. Последовательность выбранных в каждый момент времени политик образует управление $\overline{\overline{\theta}}(t)=(\overline{\theta}(t),\overline{\theta}(t+\Delta t),...,\overline{\theta}(T_{\max}))$, которое однозначно определяет эволюцию сети.

Если в формулу (1) подставить асимптотическое соотношение

$$V_n(k,t)=V_n(k)+tG_n(k)\,,$$

то получим

$$V_n(k)+(t+\Delta t)G_n(k)=\widehat{Q}_n(k,\Delta t)+\widehat{A}_n(k,\Delta t)(V_n(k)+tG_n(k)).$$

С учетом этого равенства получим систему L неоднородных уравнений Ховарда относительно $2L$ неизвестных $V_n(k)=\left\|v_{ni}(k)\right\|_{1\times L}$ и $G_n(k)=\left\|g_n(k)\right\|_{1\times L}$:

$$V_n(k)+\Delta t G_n(k)=\widehat{Q}_n(k,\Delta t)+\widehat{A}_n(k,\Delta t)V_n(k)+(\widehat{A}_n(k,\Delta t)-E_n)tG_n(k). \qquad (2)$$

С учетом переобозначения состояний и вводя вектора $V_n=(v_{n1}\ \ v_{n2}\ \ \ldots\ \ v_{nL})^T$, $G_n=(g_{n1}\ \ g_{n2}\ \ \ldots\ \ g_{nL})^T$, $\widehat{Q}_n(\Delta t)$ – вектор-столбец средних одношаговых доходов для переобозначенных состояний и $\widehat{A}_n(\Delta t)$ – матрицу вероятностей переходов между переобозначенными состояниями, получим в матричной форме:

$$V_n+\Delta t G_n=\widehat{Q}_n(\Delta t)+\widehat{A}_n(\Delta t)V_n+(\widehat{A}_n(\Delta t)-E_n)tG_n. \qquad (3)$$

Абсолютные значения весов v_{ni}, $i=\overline{1,L}$, из (3) определить нельзя, но можно определить так называемые относительные веса, положив $v_{nj}=0$, $j=j_1,j_2,\ldots,j_{L/2}$. Тогда мы получим систему L уравнений с L неизвестными, которая имеет единственное решение в виде прибыли g_{nj}, $j\neq j_1,j_2,\ldots,j_{L/2}$, и относительных весов v_{nj}, $j\neq j_1,j_2,\ldots,j_{L/2}$. Важно подчеркнуть, что система (3) и её решение не зависят от t.

Экономический смысл относительных весов легко понять из вида асимптотических соотношений для ожидаемого дохода. Возьмём два произвольных состояния i и j, для них

$$v_{ni}(t)=v_{ni}+tg_{ni} \quad \text{и} \quad v_{nj}(t)=v_{nj}+tg_{nj},$$

отсюда следует, что

$$v_{ni}(t)-v_{nj}(t)=v_{ni}-v_{nj}=(v_{ni}+g_{ni})-(v_{nj}+g_{nj}),$$

т.е. разность ожидаемого дохода, получаемого системой S_n при начальных состояниях сети i и j, при большом t является разностью относительных весов и прибылей. Она показывает, насколько выгоднее начать эксплуатацию сети из i-го состояния, чем из j-го.

Алгоритм Ховарда состоит из двух блоков – блока оценки управления (БОУ) и блока улучшения управления (БУУ). В первом находятся прибыли и относительные веса при фиксированном управлении $\overline{\theta}=(\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2,\ldots,\overline{\theta}_L)$, которые позволяют определить средний одношаговый доход $q_{ni}^{(\overline{\theta}_i)}=\sum_{j=1}^{L}a_{ij}^{(\overline{\theta}_i)}r_{n,ij}^{(\overline{\theta}_i)}$, где $R_n(\overline{\theta}_s)=\left\|r_{n,ij}^{(\overline{\theta}_s)}\right\|_{L\times L}$ – матрица одношаговых доходов, $r_{n,ij}^{(\overline{\theta}_s)}$ – доход системы S_n, когда она меняет свое состояние с i и j при использовании стратегии $\overline{\theta}_s$. Это позволяет записать уравнения Ховарда (2) в виде:

$$V_n+\Delta t G_n=\widehat{Q}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)+\widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)V_n+(\widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)-E_n)tG_n, \qquad (4)$$

где величины $\widehat{Q}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)$ и $\widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)$ в БОУ предполагаются известными. Решением системы (4) являются значения $v_{ni}(\overline{\theta})$ и $g_{ni}(\overline{\theta})$, однозначно соответствующие управлению $\overline{\theta}$. Значения прибылей $g_{ni}(\overline{\theta})$ является оценкой качества управления $\overline{\theta}$, отсюда и название блока.

Во втором блоке БУУ находиться управление, обеспечивающее более высокую прибыль при фиксированных весах. Пусть веса заданы произвольно (например, $v_{ni}=0\ \forall i$) или получены в БОУ ($v_{ni}=v_{ni}(\overline{\theta})$). Из системы (3) для каждого i имеем:

$$G_n=\left(\widehat{Q}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)+\widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)V_n-V_n\right)\left((t+\Delta t)E_n-\widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)t\right)^{-1}, \qquad (5)$$

где величины v_{ni} предполагаются известными для всех i. Найдём управление $\overline{\theta}_i'$, максимизирующее (5) по всем $\overline{\theta}_i$ или, что эквивалентно, максимизирующее критерий:

$$G_0 = \left(\widehat{Q}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t) + \widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)V_n\right)\left((t+\Delta t)E_n - \widehat{A}_n^{(\overline{\theta}_i)}(\Delta t)t\right)^{-1}. \tag{6}$$

Если решать задачу максимизации (6) для всех $i = 1,2,...,L$, то будет получено управление $\overline{\theta}' = (\overline{\theta}_1', \overline{\theta}_2',..., \overline{\theta}_L')$, которое дает не меньшую прибыль, чем управление $\overline{\theta}$ с весами $v_{ni}(\overline{\theta})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маталыцкий, М. А.* О некоторых результатах анализа и оптимизации марковских сетей с доходами и их применение / М.А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 97–113.

2. *Китурко, О. М.* О решении задачи оптимального управления методов Ховарда для трехуровневой НМ-сети / О. М. Китурко // Вестник ГрГУ. Сер. 2. 2012. № 1. С. 120–133.