ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАМКНУТОЙ RQ-СИСТЕМЫ M/GI/1//N С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК В УСЛОВИИ НЕОГРАНИЧЕННО РАСТУЩЕГО ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ

А. С. Квач, А. А. Назаров

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: kvach_as@mail.ru, nazarov.tsu@gmail.com

Исследована математическая модель замкнутой RQ-системы с конфликтами заявок методом асимптотического анализа. Получены распределения вероятностей числа источников в режиме ожидания окончания успешного обслуживания. С помощью численного алгоритма получено допредельное распределение. Произведено сравнение асимптотического распределения с допредельным, была установлена область применимости асимптотических результатов.

Ключевые слова: замкнутая RQ-система, конфликты заявок, метод асимптотического анализа, неограниченно растущее число источников.

В теории массового обслуживания [1–3] особый интерес представляют системы с повторными вызовами или RQ-системы. Такие системы характеризуются тем, что входящая заявка, обнаружившая прибор занятым, присоединяется к источнику повторных вызовов (ИПВ), чтобы повторить свой доступ к прибору через некоторый случайный промежуток времени. Область практического применения таких систем очень обширна. RQ-системы используют для исследования телекоммуникационных и компьютерных систем, при проектировании мобильных сотовых радиосетей, телефонных сетей и во многих других областях. Исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ. По этой тематике в монографии [4] приведено более семисот ссылок на издания различного уровня. Основы и фундаментальные исследования в области RQ-систем также можно найти в работах Г.И. Фалина [5].

В работах Т.В. Любиной и А.А. Назарова [6–8] были исследованы различные модели открытых RQ-систем с конфликтами заявок.

Исследованию замкнутых RQ-систем с конечным числом источников посвящены работы Almási B., Sztrick J., Roszik J. [9, 10], Artalejo J.R. [11], Dragieva V. [12, 13]. В работах Almási B., Sztrick J., Roszik J. рассматриваются модели ненадежных замкнутых RQ-систем в однородной и случайной среде, многолинейные замкнутые RQ-системы и др. Отметим, что ни в одной из приведенных работ не рассматриваются замкнутые RQ-системы с конфликтами заявок.

В публикации [14] приведены основные результаты исследования замкнутой RQ-системы с конфликтами заявок в случае экспоненциального обслуживания.

В данной работе рассматривается замкнутая RQ-система с конфликтами заявок в случае рекуррентного обслуживания. Для исследования системы предлагается метод асимптотического анализа.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается немарковская замкнутая RQ-система с N источниками. Каждый источник генерирует заявку и отправляет ее на прибор с интенсивностью λ/N. Источник, который отправил заявку на обслуживание, находится в режиме ожидания и не генерирует новую до тех пор, пока заявка не завершит обслуживание.

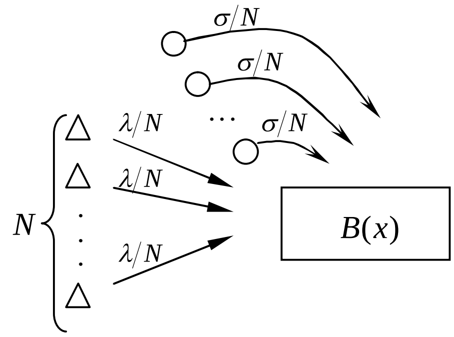

Рис. 1. Замкнутая RQ-система

Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B(x)$. Если прибор занят, то поступившая заявка вступает в конфликт с обслуживаемой заявкой и они обе переходят в ИПВ. Из ИПВ после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ/N, заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

Пусть $i(t)$ – число источников в режиме ожидания, а $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, & \text{если прибор свободен,}\\ 1, & \text{если прибор занят.}\end{cases}$$

Под состоянием системы будем понимать состояние процесса $\{k(t),\ i(t)\}$ в момент времени t. Для рассматриваемой системы процесс $\{k(t),\ i(t)\}$ не является марковским, поэтому для его марковизации введем случайный процесс $z(t)$, имеющий смысл длины интервала от момента t до момента окончания успешного обслуживания заявки.

Таким образом, исследуется марковский процесс $\{k(t),\ z(t),\ i(t)\}$, который имеет переменное число компонент в зависимости от состояния прибора, так как компонента $z(t)$ определена только в те моменты, когда $k(t) = 1$.

Обозначим $P\{k(t) = 0,\ i(t) = i\}=P_0(i,t)$– вероятность того, что прибор в момент времени t свободен и в режиме ожидания находится i источников, а $P\{k(t) = 1,\ i(t) = i,\ z(t) < z\}=P_1(i,z,t)$ – вероятность того, что прибор в момент времени t занят и до окончания обслуживания заявки остается времени меньше z, а в режиме ожидания находится i источников.

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Для распределения вероятностей $P_0(i,t)$, $P_1(i,z,t)$ состояний системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова и запишем ее для стационарного распределения

$$-\lambda P_0(0)+\frac{\partial P_1(1,0)}{\partial z}=0\,,$$

$$\frac{\partial P_1(1,z)}{\partial z}-\frac{\partial P_1(1,0)}{\partial z}-\lambda\frac{N-1}{N}P_1(1,z)+\lambda P_0(0)B(z)+\frac{\sigma}{N}P_0(1)B(z)=0\,, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P_1(i+1,0)}{\partial z}-\left(\lambda\frac{N-i}{N}+\sigma\frac{i}{N}\right)P_0(i)+\mu P_1(i+1)+\lambda\frac{N-i+1}{N}P_1(i-1)+\sigma\frac{i-1}{N}P_1(i)=0\,,$$

$$\frac{\partial P_1(i,z)}{\partial z}-\frac{\partial P_1(i,0)}{\partial z}-\left(\lambda\frac{N-i}{N}+\sigma\frac{i-1}{N}\right)P_1(i,z)+\lambda\frac{N-i+1}{N}P_0(i-1)B(z)+$$
$$+\sigma\frac{i}{N}P_0(i)B(z)=0\,.$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_0(u)=\sum_{i=0}^{N}e^{jui}P_0(i),\quad H_1(u,z)=\sum_{i=0}^{N}e^{jui}P_1(i,z).$$

Тогда систему (1) запишем в виде:

$$e^{-ju}\cdot\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\frac{j}{N}(\sigma-\lambda)\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\frac{j}{N}\left(\lambda e^{ju}-\sigma\right)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-\lambda H_0(u)+$$
$$+\left(\lambda e^{ju}-\frac{\sigma}{N}\right)H_1(u)=0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial H_1(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\frac{j}{N}\left(\lambda e^{ju}-\sigma\right)B(z)\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\frac{j}{N}(\sigma-\lambda)\frac{\partial H_1(u,z)}{\partial u}+$$
$$+\lambda e^{ju}B(z)H_0(u)+\left(\frac{\sigma}{N}-\lambda\right)H_1(u)=0\,.$$

Данную систему будем решать методом асимптотического анализа [15] в условии неограниченно растущего числа источников ($N\to\infty$).

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ НЕОГРАНИЧЕННО РАСТУЩЕГО ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ

АСИМПТОТИКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обозначим $\frac{1}{N}=\varepsilon$ и в системе (2) выполним замены

$$u=\varepsilon w\,,\ \ H_0(u)=F_0(w,\varepsilon)\,,\ \ H_1(u,z)=F_1(w,z,\varepsilon)\,.$$

Тогда система (2) перепишется в виде

$$e^{-j\varepsilon w}\cdot\frac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z}+j(\sigma-\lambda)\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}+j\left(\lambda e^{j\varepsilon w}-\sigma\right)\frac{\partial F_1(w,\varepsilon)}{\partial w}-\lambda F_0(w,\varepsilon)+$$
$$+\left(\lambda e^{j\varepsilon w}-\varepsilon\sigma\right)F_1(w,\varepsilon)=0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial F_1(w,z,\varepsilon)}{\partial z}-\frac{\partial F_1(w,0,\varepsilon)}{\partial z}+j\left(\lambda e^{j\varepsilon w}-\sigma\right)B(z)\frac{\partial F_0(w,\varepsilon)}{\partial w}+j(\sigma-\lambda)\frac{\partial F_1(w,z,\varepsilon)}{\partial w}+$$
$$+\lambda e^{j\varepsilon w}B(z)F_0(w,\varepsilon)+(\varepsilon\sigma-\lambda)F_1(w,z,\varepsilon)=0.$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Предельные (при $\varepsilon\to 0$) значения $F_0(w)$, $F_1(w,z)$ решений $F_0(w,\varepsilon)$, $F_1(w,z,\varepsilon)$ системы уравнений (3) имеют вид

$$F_0(w)=R_0e^{jw\kappa_1}\,,\ \ F_1(w,z)=R_1(z)e^{jw\kappa_1}\,,$$

где величины R_0, R_1, $R_1(z)$ определяются равенствами

$$R_0=\frac{1}{2-B^*(\delta)}\,,\ \ R_1=\frac{1-B^*(\delta)}{2-B^*(\delta)}\,,$$

$$R_1(z) = e^{\delta z} \cdot \int_0^z e^{-\delta x} \cdot \{\lambda(1-\kappa_1) - \delta R_0 B(x)\} dx, \tag{4}$$

$$B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dB(x), \quad \delta = \lambda + (\sigma - \lambda)\kappa_1,$$

а κ_1 является решением уравнения

$$\kappa_1 = 1 - \frac{\delta}{\lambda} \cdot \frac{B^*(\delta)}{2 - B^*(\delta)}.$$

АСИМПТОТИКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для нахождения асимптотики второго порядка в системе уравнений (3) выполним замены

$$H_0(u) = H_0^{(2)}(u) \exp\{ju\kappa_1 N\}, \quad H_1(u,z) = H_1^{(2)}(u,z) \exp\{ju\kappa_1 N\}. \tag{6}$$

Заменив

$$\frac{1}{N} = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \tag{7}$$

$$H_0^{(2)}(u) = F_0^{(2)}(w,\varepsilon), \quad H_1^{(2)}(u,z) = F_1^{(2)}(w,z,\varepsilon),$$

получим

$$\begin{gathered} e^{-j\varepsilon w} \cdot \frac{\partial F_1^{(2)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z} + j\varepsilon(\sigma - \lambda)\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w} + j\varepsilon\left(\lambda e^{j\varepsilon w} - \sigma\right)\frac{\partial F_1^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w} - \\ - \left[\lambda + (\sigma - \lambda)\kappa_1\right]F_0^{(2)}(w,\varepsilon) + \left[\lambda e^{j\varepsilon w}(1-\kappa_1) - \varepsilon^2\sigma + \sigma\kappa_1\right]F_1^{(2)}(w,\varepsilon) = 0, \\ \frac{\partial F_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1^{(2)}(w,0,\varepsilon)}{\partial z} + j\varepsilon\left(\lambda e^{j\varepsilon w} - \sigma\right)B(z)\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w} + j\varepsilon(\sigma - \lambda)\frac{\partial F_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)}{\partial w} + \\ + \left[\lambda e^{j\varepsilon w}(1-\kappa_1) + \sigma\kappa_1\right]B(z)F_0^{(2)}(w,\varepsilon) + \left[\lambda(\kappa_1 - 1) + \varepsilon^2\sigma - \sigma\kappa_1\right]F_1^{(2)}(w,z,\varepsilon) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 2. Предельные (при $\varepsilon \to 0$) значения $F_0^{(2)}(w)$, $F_1^{(2)}(w,z)$ решений $F_0^{(2)}(w,\varepsilon)$, $F_1^{(2)}(w,z,\varepsilon)$ системы уравнений (8) имеют вид

$$F_0^{(2)}(w) = R_0 \Phi^{(2)}(w), \quad F_1^{(2)}(w,z) = R_1(z)\Phi^{(2)}(w),$$

где

$$\Phi^{(2)}(w) = \exp\left\{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

$$\kappa_2 = A_1 \cdot \frac{R_0 \cdot B^*(\delta)[\delta + A_1] - (\delta + A_1 R_0)}{A_1(\sigma - \lambda)\left(R_1^*(\delta) - R_1 - R_0(B^*(\delta) - 1)\right) + \delta\left((\sigma - \lambda)\left(R_1^*(\delta) - R_0 B^*(\delta)\right) - \lambda\right)},$$

$$A_1 = \lambda(1 - \kappa_1),$$

$$R_1^*(\alpha) = -\delta R_0 \left[B^*(\alpha)\right]',$$

а величины R_0, R_1, $R_1(z)$ определены выражениями (4).

Найдем характеристическую функцию $h(u)$ процесса $i(t)$ числа источников в режиме ожидания окончания успешного обслуживания. Для этого выполним обратные к (7) замены и, учитывая (6), получим

$$h(u) = \exp\left\{ju\kappa_1 N + \frac{(ju)^2}{2}\kappa_2 N\right\}.$$

Мы получили характеристическую функцию нормального распределения с математическим ожиданием $\kappa_1 N$ и дисперсией $\kappa_2 N$.

СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМ ПОДХОДОМ

Для рассматриваемой RQ-системы реализован численный алгоритм. С его помощью найдено распределение вероятностей числа источников в режиме ожидания окончания успешного обслуживания для допредельной ситуации.

Выясним, насколько результаты, полученные с помощью асимптотического анализа, близки к результатам, полученным в допредельной ситуации. Для этого воспользуемся расстоянием Колмогорова

$$\Delta = \max_{0\le k\le N}\left|\sum_{i=0}^{k} P_{as}(i) - \sum_{i=0}^{k} P(i)\right|,$$

где $P_{as}(i)$ – асимптотическое распределение, $P(i)$ – распределение вероятностей, полученное с помощью численного алгоритма.

Рассмотрим гамма-распределение времени обслуживания заявок. Для гамма-распределения с параметрами α и β преобразование Лапласа-Стилтьеса $B^*(u)$ имеет следующий вид: $B^*(u) = \left(1 + \frac{u}{\beta}\right)^{-\alpha}$. Положим $\alpha = \beta$, и параметр β будем варьировать. Для отображения изменения значений параметров гамма-распределения воспользуемся коэффициентом вариации $V = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Пусть $\lambda = 2$, $\sigma = 10$. В таблице 1 приведены значения расстояния Колмогорова Δ для различных N и V.

Таблица 1

V \ N	10	20	30	50	100
0,1	0,052	0,045	0,034	0,016	0,014
1	0,029	0,020	0,016	0,013	0,008
2	0,018	0,013	0,010	0,007	0,005

Если считать допустимой погрешностью аппроксимации (расстояние Колмогорова) $\Delta = 0{,}03$, то можно сделать вывод, что гауссовская аппроксимация с хорошей степенью точности аппроксимирует распределение $P(i)$ при $N \ge 40$ для коэффициента вариации равного 0,1.

Когда $V = 1$ ($\alpha = \beta = 1$) гамма-распределение является экспоненциальным с параметром $\mu = 1$. Достаточная точность достигается уже при $N \ge 10$. Отметим, что результаты, полученные в случае экспоненциального распределения времени обслуживания, совпадают с результатами исследования марковской замкнутой RQ-системы с конфликтами заявок [14].

Для гамма-распределения с коэффициентом вариации $V = 2$ можно сделать вывод, что точность полученного асимптотического распределения достаточно велика, так для $N \geq 10$ расстояние Колмогорова не превышает значения 0,03.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России № 1.511.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров, А. А.* Теория массового обслуживания: учебное пособие. 2-е изд., испр. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 228 с.
2. *Гнеденко, Б. В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. М. : КомКнига, 2007. 336 с.
3. *Кёнинг, Д.* Теория массового обслуживания (основной курс: марковские модели, методы марковизации): учеб. пособие по математике для студентов специальности 0647 «Прикладная математика» / Д. Кёнинг, В. Рыков, Д. Штойян. М., 1979.
4. *Artalejo, J. R.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. Springer, 2008. 309 p.
5. *Falin, G. I.* Retrial queues / G. I. Falin, J. G. C. Templeton. London : Chapman & Hall, 1997. 328 p.
6. *Lyubina, T. V.* Research of the Markov dynamic retrial queue system with collision. (In Russian) / T. V. Lyubina, A. A. Nazarov // Herald of Tomsk State University. Journal of Control and Computer Science. 2010. V. 3(12). P. 73–84.
7. *Lyubina, T. V.* Research of the non-Markov dynamic retrial queue system with collision (In Russian) / T. V. Lyubina, A. A. Nazarov // Herald of Kemerovo State University. 2012. V. 1(49).
8. *Гарайшина, И. Р.* Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания / И. Р. Гарайшина, С. П. Моисеева, А. А. Назаров. Томск : Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
9. *Almási, B.* Homogeneous Finite-Source Retrial Queues with Server Subject to Breakdowns and Repairs / B. Almási, J. Roszik, J. Sztrik // Mathematical and Computer Modeling 42. 2005. P. 673–682.
10. *Sztrik, J.* Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs / J. Sztrik, B. Almási, J. Roszik // Journal of Mathematical Sciences 132. 2006. P. 677–685.
11. *Artalejo, J. R.* Retrial queues with a finite number of sources / J. R. Artalejo //. J. Korean Math. Soc. 1998. V. 35. P. 503-525.
12. *Dragieva, V. I.* Single-line queue with finite source and repeated calls / V. I. Dragieva // Problems of Information Transmission. 1994. V. 30. P. 283–289.
13. *Dragieva, V. I.* System State Distributions In One Finite Source Unreliable Retrial Queue / V. I. Dragieva. http://elib.bsu.by/handle/123456789/35903.
14. *Nazarov, A.* Asymptotic analysis of closed Markov Retrial Queuing System with collision / A. Nazarov, A. Kvach, V. Yampolsky // Communications in Computer and Information Science 487: Information Technologies and Mathematical Modelling. 2014. P. 334–341.
15. *Назаров, А. А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.