НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПРОЦЕССОВ ГАЛЬТОНА – ВАТСОНА

А. А. Имомов[1], А. Мейлиев[2]

[1]Государственный Центр Тестирования при Кабинете Министров Республики Узбекистан, Институт Математики при Национальном Университете Узбекистана
[2]Каршинский Государственный университет Узбекистан
E-mail: imomov_azam@mail.ru

Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона – Ватсона. С помощью асимптотического разложения производной производящих функций распределения поколений исследуем предельные поведения траекторий процесса. Уточняется некоторые результаты классической теории процессов Гальтона – Ватсона.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, переходные вероятности, цепь Маркова, инвариантная мера.

Обозначим Z_n численность популяции в момент времени $n \in \mathbf{N}_0$ в обычном ветвящемся процессе Гальтона – Ватсона (ПГВ); $\mathbf{N}_0 = \{0\} \cup \{\mathbf{N} = 1, 2, ...\}$ с $\mathbf{P}\{Z_0 = 1\} = 1$. Рассматриваемый процесс образует однородную цепь Маркова с множеством возможных состояний $S \subseteq \mathbf{N}_0$ и переходными вероятностями

$$P_{ij} := \mathbf{P}\{Z_{n+1} = j \mid Z_n = i\} = \sum_{k_1 + ... + k_i = j} p_{k_1} \cdot p_{k_{21}} ... p_{k_i}, \tag{1}$$

для любых $i, j \in S$, где $p_k = P_{1k}$ и $\sum_{k \in S} p_k = 1$. И наоборот, любая цепь, удовлетворяющая свойству (1), представляет собой ПГВ с законом превращения $\{p_k\}$. Из условия (1) вытекает, что заданием распределения $\{p_k\}$ полностью определяется ПГВ (см. [1, сс. 1–2], [4, с. 19]). С этого места мы предположим, что $p_k \neq 1$ и $p_0 + p_1 < 1$.

В исследованиях свойств ПГВ основным инструментом является вероятностная производящая функция (ПФ) и ее итерации. Пусть

$$F(s) = \sum_{k \in S} p_k s^k, \ 0 \leq s \leq 1.$$

Если математическое ожидание $\sum_{k \in S} k p_k$ конечное, то число $A := F'(s \uparrow 1)$ обозначает среднее число непосредственных потомков одной частицы за одно поколение. ПГВ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $A < 1$, $A = 1$ и $A > 1$, соответственно. Обозначим $P_{ij}(n) := \mathbf{P}\{Z_{n+r} = j \mid Z_r = i\}$, $r \in \mathbf{N}_0$, переходную вероятность нашего ПГВ. В силу уравнения Колмогорова – Чепмена легко проверить, что ПФ

$$\mathbf{E}_i s^{Z_n} := \sum_{j \in S} P_{ij}(n) s^j = [F_n(s)]^i, \ i \in S,$$

где ПФ $F_n(s) = \mathbf{E}_1 s^{Z_n}$ задается n-кратной итерацией $F(s)$, то есть

$$F_{n+m}(s) = F_n(F_m(s)) = F_m(F_n(s)) \tag{2}$$

(см. [7, сс.16–17] и [1, сс.2–3]).

Вычисление вероятности вырождения является классической задачей теории ветвящихся процессов. Полное и корректное определение этой вероятности впервые было дано Дж. Стефенсоном [5], [6]. Обозначим ее через q. Она равна 1, если $A \le 1$ и, меньше 1, если $A > 1$. Из классической теоремы о вырождении известно, что $\mathbf{P}_i\{T < \infty\} = q^i$, где $T = \min\{n : Z_n = 0\}$. Пусть $R_n(s) = q - F_n(s)$. В частности, когда $A \le 1$, величина $R_n(0) = \mathbf{P}\{T > n\}$ представляет собой вероятностью продолжения процесса.

Рассмотрим случай $A \ne 1$. Заметим, что формула Лагранжа нам дает равенство

$$R_{n+1}(s) = F'(\xi_n(s))R_n(s), \tag{3}$$

где $\xi_n(s) = q - \theta R_n(s)$, $0 < \theta < 1$. Пусть вначале $s \in [0; q]$. В этом случае функция $R_n(s) > 0$ и, следовательно, $\xi_n(s) < q$. С другой стороны, $R_n(s) < q\beta^n$, где положительная величина $\beta = F'(q) < 1$. Собирая последние замечания, имеем неравенства

$$F^{(k)}\left(q\left(1-\beta^n\right)\right) < F^{(k)}(\xi_n(s)) < F^{(k)}(q), \ k = 1,2, \tag{4}$$

для всех $s \in [0; q]$. В (5) верхние индексы обозначают производные соответствующего порядка. Рассматривая вместе представления (3) и (4), получим соотношения

$$\frac{R_{n+1}(s)}{\beta} < R_n(s) < \frac{R_{n+1}(s)}{F'\left(q\left(1-\beta^n\right)\right)}. \tag{5}$$

С помощью формулы Тейлора и итерации (2) имеем разложение

$$R_{n+1}(s) = \beta R_n(s) - \frac{F''(\xi_n(s))}{2} R_n^2(s), \ n \to \infty, \tag{6}$$

здесь и далее величины $\xi_n(s)$ такие, что для них выполняется (4). Комбинируя соотношения (4)–(6), убедимся в справедливости следующих неравенств:

$$\frac{1}{2\beta}\sum_{k=0}^{n-1} F''\left(q\left(1-\beta^k\right)\right)\beta^k < \frac{\beta^n}{R_n(s)} - \frac{1}{q-s} < \frac{F''(q)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta^k}{F'\left(q\left(1-\beta^k\right)\right)}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем оценку

$$\frac{\Delta_1}{2} \le \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\beta^n}{R_n(s)} - \frac{1}{q-s}\right] \le \frac{\Delta_2}{2}, \tag{7}$$

здесь числовые ряды

$$\Delta_1 := \sum_{k\in\mathbf{N}_0}\frac{F''\left(q\left(1-\beta^k\right)\right)}{\beta}\beta^k \quad \text{и} \quad \Delta_2 := \sum_{k\in\mathbf{N}_0}\frac{F''(q)}{F'\left(q\left(1-\beta^k\right)\right)}\beta^k$$

сходятся. Введя обозначения

$$\frac{1}{A_1(s)} := \frac{1}{q-s} + \frac{\Delta_1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{A_2(s)} := \frac{1}{q-s} + \frac{\Delta_2}{2},$$

соотношения (7) преобразуем к виду

$$\frac{1}{A_1(s)} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\beta^n}{R_n(s)} \le \frac{1}{A_2(s)}.$$

Поэтому существует положительная величина $\delta = \delta(s)$ такая, что $\Delta_1 \le \delta \le \Delta_2$ и

$$R_n(s) = A(s)\cdot\beta^n(1 + \mathrm{o}(1)), \ n \to \infty, \tag{8}$$

для $0 \le s \le q$, где

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{1}{q-s} + \frac{\delta}{2}. \tag{9}$$

Используя еще раз формулу Лагранжа, имеем

$$\frac{R'_{n+1}(s)}{R'_n(s)} = \beta - F''(\xi_n(s))R_n(s). \tag{10}$$

Напоминаем, что $s \in [0;q)$. Очевидно, функция $R_n(s)$ монотонно убывает по s и для любого $n \in \mathbf{N}_0$. Логарифмируя и затем суммируя, равенство (10) преобразуем к виду

$$\ln\left[-\frac{R'_n(s)}{\beta^n}\right] = \sum_{k=0}^{n-1}\ln\left[1 - \frac{F''(\xi_k(s))}{\beta}R_k(s)\right] =: \sum_{k=0}^{n-1}\ln L_k(s). \tag{11}$$

Используя неравенства $(b-a)/b < \ln b/a < (b-a)/a \quad (0 < b < a)$, для величины $L_k(s)$ (легко проверяется возможность такого применения), напишем соотношения

$$\frac{L_k(s)-1}{L_k(s)} < \ln L_k(s) < L_k(s) - 1. \tag{12}$$

Рассмотрев вместе (4), (11) и (12), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{F''\left(q\left(1-\beta^k\right)\right)}{\beta}R_k(s) < \ln\left[-\frac{\beta^n}{R'_n(s)}\right] < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{F''(q)}{F'\left(q\left(1-\beta^k\right)\right)}R_k(s).$$

Используя здесь (7) и (8), заключаем

$$\Delta_1 \le \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[-\dfrac{\beta^n}{R'_n(s)}\right]}{A(s)} \le \Delta_2.$$

Так что последовательность $\{\ln[-\beta^n/R'_n(s)]\}$ сходится равномерно при $n \to \infty$. Опираясь на последние рассуждения, можем написать, что

$$\ln\left[-\frac{\beta^n}{R'_n(s)}\right] \to \delta \cdot A(s), \quad n \to \infty, \tag{13}$$

где $\Delta_1 \le \delta \le \Delta_2$ и функция $A(s)$ задана равенством (9).

Проведя аналогичные рассуждения для $s \in [q;1)$, убедимся в том, что равенство (9) и сходимость (13) справедливо для всех значений s таких, что $0 \le s \le 1$.

Лемма 1. Пусть $A < 1$ и $F''(1) < \infty$ или $A > 1$. Тогда для $0 \le s \le 1$ существует положительная величина $\delta = \delta(s)$, такая что $\Delta_1 \le \delta \le \Delta_2$ и имеет место асимптотическое представление

$$R'_n(s) = -K(s)\cdot\beta^n(1+o(1)), \quad n \to \infty, \tag{14}$$

где $K(s) = \exp\{-\delta \cdot A(s)\}$.

Замечание 1. Последние утверждения показывают, что функция $A(s)$ играет такую же роль, как у одноименной функции в формуле типа (10) для марковского процесса с непрерывным временем (см. [3], а также [2]). Действительно, можно проверить, что в условиях Леммы 1, $0 < A(0) < \infty$, $A(q) = 0$, $A'(q) = -1$, а также она асимптотически удовлетворяет уравнению Шредера:

$$A(F_n(qs)) = \beta^n \cdot A(qs)(1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

на множестве $0 \le s < 1$.

Прейдем к критическому случаю. Из классической теории ПГВ известно, что если $2B := F''(1) < \infty$, то имеет место асимптотическое разложение

$$R_n(s) = \frac{1-s}{(1-s)Bn+1}(1+o(1)), \ \ n \to \infty \tag{15}$$

для всех $0 \le s < 1$ (см. напр., [1, с.19]).

Лемма 2. Если $A = 1$ и конечен второй момент $2B := F''(1)$, то справедливо асимптотическое представление

$$R_n'(s) = \frac{\hbar(s)B}{s - F(s)} R_n^2(s)(1+o(1)), \ \ n \to \infty, \tag{16}$$

где $F'(s) \le \hbar(s) \le 1$ и $R_n(s)$ имеет разложение (15).

Доказательство. Разложение Тейлора нам дает

$$F_n(F(s)) - F_n(s) = BR_n^2(s)(1+o(1)), \ \ n \to \infty. \tag{17}$$

В левой части (17) применяем теорему Лагранжа и имеем

$$F_n'(c(s)) = \frac{B}{F(s)-s} R_n^2(s)(1+o(1)), \ \ n \to \infty, \tag{18}$$

где $s < c(s) < F(s)$. Используя свойства ПФ и учитывая итерации, получим

$$\frac{F'(s)}{F'(F_n(s))} F_n'(c(s)) < F_n'(s) < F_n'(c(s)). \tag{19}$$

Из (18) и (19), с учетом непрерывности $F'(s)$, следует

$$F'(s) \le \lim_{n\to\infty} \frac{(F(s)-s)F_n'(n)}{BR_n^2(s)} \le 1.$$

Обозначая через $\hbar(s)$ среднюю часть в этих неравенствах, приходим к (16). □

Из (14) и (16), получим следующие локальные предельные теоремы.

Теорема 1. Пусть $A < 1$ и $F''(1) < \infty$ или $A > 1$. Тогда

$$\beta^{-n} P_{11}(n) = K(0)(1+o(1)), \ \ n \to \infty, \tag{20}$$

где функция $K(s)$ определена в (14).

Теорема 2. Если $A = 1$ и второй момент $F''(1) =: 2B$ конечен, то

$$n^2 P_{11}(n) = \frac{\hat{p}_1}{p_0 B}(1+o(1)), \ \ n \to \infty, \tag{21}$$

здесь и далее $p_1 \le \hat{p}_1 \le 1$.

Последующие две теоремы следуют из предыдущих, с применением следующей леммы о монотонности отношений [1, с.15]: если $p_1 \ne 0$, то

$$\frac{P_{1j}(n)}{P_{11}(n)} \uparrow \mu_j < \infty, \ \ n \to \infty.$$

Теорема 3. Пусть $p_1 \ne 0$. Если $A < 1$ и $F''(1) < \infty$ или $A > 1$, то

$$\beta^{-n} P_{ij}(n) = \frac{A(0)}{M(q)} i q^{i-1} \mu_j (1+o(1)), \ \ n \to \infty, \ \text{ где } \ M(s) = \sum\nolimits_{j\in S} \mu_j s^j.$$

Теорема 4. Пусть $p_1 \ne 0$. Если $A = 1$ и $F''(1) =: 2B < \infty$, то

$$n^2 P_{ij}(n) = \frac{\hat{p}_1}{p_0 B} i\mu_i(1+o(1)), \quad n \to \infty .$$

Определим условные вероятности перехода $\widetilde{P}_{ij}(n) = \mathbf{P}_i\{Z_n = j \,|\, n < T < \infty\}$ и обозначим соответствующую ПФ $V^{(i)}(s) = \sum_{j \in S} \widetilde{P}_{ij}(n) s^j$.

Теорема 5. Пусть $p_1 \neq 0$. Если $A < 1$ и $F''(1) < \infty$ или $A > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{P}_{ij}(n) = v_j, \quad j \in S ,$$

и соответствующая предельная ПФ $V(s) = \sum_{j \in S} v_j s^i$ имеет вид

$$V(s) = 1 - \frac{A(qs)}{A(0)} .$$

Теорема 6. Пусть $A = 1$. Если $2B := F''(1) < \infty$, то

$$nV_n^{(i)}(s) = \frac{1}{B}\frac{s}{1-s} + \rho_n(s), \quad n \to \infty, \text{ где } \sup_{0 \le s \le 1}|\rho_n(s)| = O(1/n) .$$

Теорема 7. Пусть $A \neq 1$ и $F''(1) < \infty$ в случае $A < 1$. Тогда

$$P_{ij}(n) = \widetilde{P}_{ij}(n) \cdot \sum_{k \in S} P_{ik}(n) q^{k-j} ,$$

где вероятности $\widetilde{P}_{ij}(n)$ обладает свойством эргодичности и их пределы $v_j = \lim_{n\to\infty} \widetilde{P}_{ij}(n)$ образуют $|\ln\beta|$-инвариантное распределение для $\widetilde{Z}_n$.

Теорема 8. Если в критическом случае $2B := F''(1) < \infty$, то

$$n\widetilde{P}_{ij}(n) = \frac{1}{B} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty .$$

Замечание 2. Приведенные теоремы представляют собой, в основном, дискретные аналоги результатов работы автора [2]. На основе наших рассуждений лежат утверждения леммы 1 и 2. При получении утверждения локальных предельных теорем 3 и 4 использована лемма о монотонности отношений. Теорема 5 уточняет результат классической теоремы Яглома [8], которая была доказана только в докритическом случае. Теорема 7 описывает эргодические свойства и утверждает существования инвариантной меры для ПГВ. Теорема 8 является прямым следствием теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Athreya, K. B.* Branching processes / K. B. Athreya, P. E. Ney. New York : Springer, 1972.

2. *Imomov, A. A.* Limit properties of transition function of continuous-time Markov Branching Processes / A. A. Imomov // International Journal of Stochastic Analysis. 2014. doi: 10.1155/2014/409345, 10 pages.

3. *Imomov, A. A.* On Markov analogue of Q-processes with continuous time / A. A. Imomov // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2012. V. 84. P. 57–64.

4. *Jagers, P.* Branching Progresses with Biological applications / P. Jagers. Great Britain : John Wiley & Sons, Pitman Press, 1975. 268 p.

5. *Steffensen, J. F.* Om sandsynligheden for at afcommet uddor / J. F. Steffensen // Matematisk Tidsskrift. 1930. B 1. P. 19–23.

6. *Steffensen, J. F.* Deux problemes du calcul des probabilities / J. F. Steffensen // Ann. Inst. H. Poincaré. 1932. 3. P. 319–344.

7. *Харрис, Т.* Теория ветвящихся случайных процессов / Т. Харрис. М. : Мир, 1966. 355 с.

8. *Яглом, А. М.* Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов / А. М. Яглом. ДАН СССР, 1947. 56(8). С. 795–798.