О РАСЧЁТЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО И АМЕРИКАНСКОГО ТИПОВ

Н. М. Зуев

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: zuevnm@bsu.by

Приводятся рекуррентные соотношения для вычисления стоимости опциона и сопровождающего портфеля для опционов Европейского и Американского типов.

Ключевые слова: опцион, стоимость опциона, самофинансируемый портфель.

Рассматривается (B,S) рынок [1]. Значение S_n – стоимость единицы рискового актива в момент времени n – изменяется следующим образом

$$S_n = S_0(1+\rho_1)...(1+\rho_n),$$

где ρ_k, $k=1,\ldots,n$, – процентные ставки, которые изменяются случайным образом. B_n – стоимость единицы безрискового актива в момент времени n, которая зависит только от случайных величин $\rho_1,...,\rho_{n-1}$. $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$ – портфель в момент времени n, где β_n – количество единиц безрискового актива в момент времени n, γ_n – количество единиц рискового актива в момент времени n, $n=1,\ldots,N$, N – терминальный момент, в который предъявляется опцион к исполнению. f_N – функция выплат, которая зависит только от случайных величин $\rho_1,...,\rho_n$. В случае стандартного опциона купли Европейского типа $f_N=(S_N-K)^+$ – платежное обязательство, т.е. потери, которые несёт продавец опциона от единицы рискового актива, K – контрактная цена на покупку единицы рискового актива в момент времени N. β_n,γ_n являются предсказуемыми величинами и зависят только от $\rho_1,...,\rho_{n-1}$. $X_n=\beta_n B_n+\gamma_n S_n$ – стоимость портфеля в момент n.

Задача расчёта опционов Европейского типа состоит в выборе начального капитала $X_0^{(N)}>0$ (стоимость опциона) и портфеля $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$, $n=1,\ldots,N$, такими, чтобы $E(X_N-f_N)=0$ и $D(X_N-f_N)$ была бы минимальной.

Для удобства обозначим $\widetilde{X}_n=\dfrac{X_n}{B_n}$, $\widetilde{S}_n=\dfrac{S_n}{B_n}$, $\overline{\rho}_n=(\rho_1,...,\rho_n)$, $\widetilde{f}_N=\dfrac{f_N}{B_N}$, $f_N{}^{\min}=f_N$.

Теорема 1. [2] Для самофинансируемого портфеля $\pi_n=(\beta_n,\gamma_n)$, $n=1,\ldots,N$, $X_0^{(N)}$, β_n,γ_n находятся рекуррентным образом из следующих соотношений:

$$\gamma_n=\frac{E(\Delta(\widetilde{S}_n)\widetilde{f}_n^{\min}\,|\,\overline{\rho}_{n-1}))-E(\Delta(\widetilde{S}_n)|\overline{\rho}_{n-1})E(\widetilde{f}_n^{\min}\,|\,\overline{\rho}_{n-1})}{D(\Delta(\widetilde{S}_n)\,|\,\overline{\rho}_{n-1})},$$

$$\widetilde{f}_{n-1}^{\min}=E(\widetilde{f}_n^{\min}\,|\,\overline{\rho}_{n-1})-\gamma_n E(\Delta(\widetilde{S}_n)\,|\,\overline{\rho}_{n-1}),\quad \beta_n=\beta_{n-1}-\widetilde{S}_{n-1}(\gamma_n-\gamma_{n-1}),\quad \widetilde{X}_0^{(N)}=\widetilde{f}_0^{\min},\quad n=1,\ldots,N.$$

Здесь условное математическое ожидание и дисперсия берутся относительно случайных величин $\overline{\rho}_{n-1}$.

Доказательство. В случае самофинансируемого портфеля величина X_n меняется по следующему закону:

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n .$$

Отсюда получаем $\frac{X_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{X_n}{B_n} = \gamma_{n+1}\left(\frac{S_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{S_n}{B_n}\right)$, т.е. $\Delta\left(\frac{X_n}{B_n}\right) = \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right)$.

Следовательно,

$$\frac{X_N}{B_N} = \frac{X_0}{B_0} + \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \Delta\left(\frac{S_k}{B_k}\right). \tag{1}$$

Тогда из (1) получаем равенство

$$X_N - \widetilde{f}_N = \widetilde{X}_0 - \widetilde{f}_0^{\min} + \sum (\widetilde{f}_{k-1}^{\min} + \gamma_k \Delta(\widetilde{S}_k) - \widetilde{f}_k^{\min}),$$

где функции $\widetilde{f}_n^{\min}$, $n = 1,\dots, N-1$, зависящие от $\overline{\rho}_n$, выберем ниже.

Величины $\widetilde{f}_{N-1}^{\min}$ и γ_N выберем из соотношений

$$E(\widetilde{f}_{N-1}^{\min} + \gamma_N \Delta(\widetilde{S}_N) - \widetilde{f}_N \,|\, \overline{\rho}_{N-1}) = 0, \tag{2}$$

$$D(\widetilde{f}_{N-1}^{\min} + \gamma_N \Delta(\widetilde{S}_N) - \widetilde{f}_N \,|\, \overline{\rho}_{N-1}) = \min . \tag{3}$$

Из (2) и (3) находим

$$\gamma_N = \frac{E(\Delta(\widetilde{S}_N)\widetilde{f}_N^{\min} \,|\, \overline{\rho}_{N-1})) - E(\Delta(\widetilde{S}_N) \,|\, \overline{\rho}_{N-1}) E(\widetilde{f}_N^{\min} \,|\, \overline{\rho}_{N-1})}{D(\Delta(\widetilde{S}_N) \,|\, \overline{\rho}_{N-1})}, \tag{4}$$

$$\widetilde{f}_{N-1}^{\min} = E(\widetilde{f}_N^{\min} \,|\, \overline{\rho}_{N-1}) - \gamma_N E(\Delta(\widetilde{S}_N) \,|\, \overline{\rho}_{N-1}). \tag{5}$$

Величины $\widetilde{f}_{N-2}^{\min}$ и γ_{N-1} находятся из соотношений (4) и (5) заменой N на $N-1$ и т.д.

Значение $\widetilde{X}_0$ полагаем $\widetilde{f}_0^{\min}$. Величины β_n находятся из (1) и стоимости портфеля в момент времени n.

В случае опционов Американского типа в каждый момент времени n, $n \le N$, заданы платежные обязательства $f_n^{obl} = f_n^{obl}(\rho_1,\dots,\rho_n)$ и необходимо выполнение условия хеджирования:

$$\min_{X_0^{(N)},\pi} E(X_n - f_n^{obl}) \ge 0 \quad \text{и} \quad D(X_n - f_n^{obl}) = \min_{X_0^{(N)},\pi} .$$

Ниже приводится несколько другой подход к нахождению стоимости опциона Американского типа, чем приведенный в работе [3].

Теорема 2. В случае опциона Американского типа для самофинансируемого портфеля $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ стоимость опциона Американского типа $X_0^{(N)}$ находится из соотношения $X_0^{(N)} = \max_{n \le N} X_0^{(n)}$, где $X_0^{(n)}$ находятся из теоремы 1 заменой N на n.

Доказательство теоремы следует из теоремы 1 и доказательства теоремы 2 работы [3].

В случае, когда случайные величины ρ_n для всех n принимают только два значения, то для любых вероятностей этих значений равенство (2) обращается в два линейных уравнения $\tilde{f}_{N-1}^{\min} + \gamma_N \Delta(\tilde{S}_N) - \tilde{f}_N = 0$ с двумя неизвестными $\tilde{f}_{N-1}^{\min}$ и γ_N.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев, А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2 : Теория / А. Н. Ширяев. М. : Фазис, 1998. С. 482–1106.

2. *Zuev, N. M.* Calculation of European type options / N. M. Zuev // Computer data applied and modeling. Minsk, 2013. V. 2. P. 188–189.

3. *Зуев, Н. М.* Расчёт опционов Европейского и Американского типов / Н. М.Зуев // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Мн., 2014. С. 64–66.