ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА ПОВТОРНЫХ ОБРАЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ GI|M|∞ С ПОВТОРНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Л. А. Задиранова

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Российская Федерация
E-mail: ZhidkovaLA@mail.ru

Рассматривается система массового обслуживания GI|M|∞ с повторными обращениями заявок в систему. С помощью метода асимптотического анализа получено приближение характеристической функции числа повторного обслуживания за время *t*, проведен численный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: поток повторных обращений, метод асимптотического анализа.

Сложный характер рыночной экономики и современный уровень предъявляемых к ней требований стимулируют использование более серьезных методов анализа ее теоретических и практических проблем. В последние десятилетия значительный вес в экономических исследованиях приобрели математические методы. Математическое моделирование становится одним из основных и наиболее плодотворных методов изучения экономических процессов и объектов.

В качестве математических моделей социально-экономических и демографических процессов часто используют системы массового обслуживания (СМО) с неограниченным числом обслуживающих приборов [1, 2]. Как правило, в таких системах число потенциальных клиентов (банков, страховых организаций, пенсионных фондов, налоговых инспекций и др.) считается неограниченным.

Одной из модификаций СМО с неограниченным числом приборов являются системы массового обслуживания с повторными обращениями. В работах [3, 4] в качестве математических моделей изменения числа клиентов торговых компаний предлагается использовать СМО с неограниченным числом приборов, пуассоновским входящим потоком и повторными обращениями.

Однако пуассоновский поток не всегда верно описывает реальные потоки заявок. В связи с чем, можно сделать вывод о том, что существует необходимость расширения круга исследуемых моделей массового обслуживания с непуассоновским входящим потоком, а также разработки методов их исследований.

В данной статье помощью метода асимптотического анализа приводится исследование потока повторных обращений в СМО с повторными обращениями, на вход которой поступает рекуррентный поток.

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, на вход которой поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x)$.

Продолжительность обслуживания заявки имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Поступившая заявка занимает любой из свободных приборов, завершив обслуживание на котором, с вероятностью $1 - r$ покидает систему или с вероятностью r возвращается в неё для повторного обслуживания.

Обозначим $i(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t, $n(t)$ – число заявок, обратившихся в систему за время t для повторного обслуживания. Так как полученный случайный процесс $\{i(t), n(t)\}$ немарковский, то марковизируем его, введя дополнительную переменную $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента поступления следующей заявки. Тогда трехмерный процесс $\{z(t), i(t), n(t)\}$ будет марковским.

Ставится задача исследования потока повторных обращений в систему за время t.

Обозначим распределение вероятностей значений полученного марковского процесса $P(z,i,t) = P\{z(t) < z, i(t) = i, n(t) = n\}$, тогда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(z,i,n,t)}{\partial z} - \frac{\partial P(0,i,n,t)}{\partial z} + i\mu r P(z,i,n-1,t) + \mu(1+i)(1-r)P(z,i+1,n,t) +$$

$$+ A(z)\frac{\partial P(0,i-1,n,t)}{\partial z} - i\mu P(z,i,n,t), \text{ где } i = \overline{0,\infty}, n = \overline{0,\infty}.$$

Введем частичные характеристические функции в виде

$$H(z,u,w,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{jui} e^{jwn} P(z,i,n,t),$$

тогда имеем

$$\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial t} = \frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial z} - j\mu\left[(1-r)e^{-ju} + re^{jw} - 1\right]\frac{\partial H(z,u,w,t)}{\partial u} +$$

$$+ (e^{ju}A(z) - 1)\frac{\partial H(0,u,w,t)}{\partial z}. \qquad (1)$$

Полученное уравнение позволяет определить основные характеристики рассматриваемой системы.

Определим характеристики потока повторных обращений в рассматриваемой системе методом асимптотического анализа. Данный метод заключается в нахождении аппроксимации характеристической функции потока повторных обращений в системе GI|M|∞ при определенных условиях, для нашей системы мы будем рассматривать условие растущего времени обслуживания [5].

Обозначим

$$\mu = \varepsilon, u = \varepsilon y, H(z,u,w,t) = F(z,y,w,t,\varepsilon) \qquad (2)$$

и перепишем (1) с учетом введенных обозначений (2)

$$\frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial z} + (e^{j\varepsilon w}A(z) - 1)\frac{\partial F(0,y,w,t,\varepsilon)}{\partial z} -$$

$$- j((1-r)e^{-j\varepsilon w} + re^{jw} - 1)\frac{\partial F(z,y,w,t,\varepsilon)}{\partial y} = 0. \qquad (3)$$

Выполняя в данном уравнении предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получаем, что $F(z,y,w,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial t} = \frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial z} + (A(z) - 1)\frac{\partial F(0,y,w,t)}{\partial z} - jr(e^{jw} - 1)\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial y}.$$

В уравнении (3) выполним предельный переход при $z \to \infty$

$$\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial t} + jr(e^{jw}-1)\frac{\partial F(z,y,w,t)}{\partial y} = 0, \qquad (4)$$

общее решение полученного уравнения имеет вид

$$F(y,w,t) = \varphi\left(t + \frac{jy}{r(e^{jw}-1)}\right),$$

где $\varphi(y)$ – некоторая функция. Чтобы определить вид данной функции, необходимо начальное условие. Заметим, что в нулевой момент времени функция $F(y,w,0)$ не зависит от переменой w, так как число обслуженных заявок в этот момент равно нулю. Таким образом имеем начальное условие:

$$F(y,w,0) = \Phi(y), \qquad (5)$$

где $\Phi(y)$ – асимптотическое приближение характеристической функции числа занятых приборов в системе в момент времени t в условии растущего времени обслуживания, вид которого был определен в работе [6]:

$$\Phi(y) = \exp\left\{\frac{j\lambda y}{1-r}\right\},$$

где $\lambda = \frac{\partial R(0)}{\partial z}$, $R(z)$ – стационарное распределение вероятностей значений случайного процесса $z(t)$.

Запишем частное решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию (5)

$$F(y,w,t) = \exp\left\{\frac{r\lambda t}{1-r}(e^{jw}-1) + \frac{j\lambda y}{1-r}\right\}.$$

Полагая в данном равенстве $y = 0$, имеем асимптотическое приближение характеристической функции числа заявок, поступивших в систему для повторного обслуживания за время t, в условии растущего времени обслуживания

$$M\{e^{jwn(t)}\} = H(0,w,t) = F(0,w,t,\varepsilon) \approx \exp\left\{\frac{r\lambda t}{1-r}(e^{jw}-1)\right\}.$$

Для определения области применения полученного результата проведем сравнение распределения числа повторных обращений в систему за время t, полученного методом асимптотического анализа и допредельным способом для частного случая, когда на вход системы поступает поток заявок с функцией распределения длин интервалов между моментами поступления заявок $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, для этого с помощью обратного предобразования Фурье данной характеристической функции найдем асимптотическое распределение вероятностей $P_2(n)$

$$P_2(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwn} h_2(w)dw.$$

Используя вид производящей функции распределения вероятностей $P(n,t)$ числа повторных обращений, реализованных за время t, в системе M|M|∞, полученный в работе [4], имеем:

$$P(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jun} h_0(u)du,$$

где $h_0(u) = \exp\left\{\lambda r \frac{e^{ju}-1}{1-re^{ju}} t - \frac{\lambda r^2}{\mu(1-r)} \frac{(e^{ju}-1)^2}{(1-re^{ju})^2}(1-e^{-\mu(1-re^{ju})t})\right\}.$

Пример 1: Используем следующие значения параметров $r = 0{,}75$, $\lambda = 0{,}6$. Определим расстояние Колмогорова между распределениями при изменении значения произведения μt.

Таблица 1

Расстояние Колмогорова при r = 0,75, λ = 0,6

μt	Δ
1,00	0,253
0,50	0,148
0,10	0,035
0,05	0,018

Рассмотрим случай, когда параметры $r = 0{,}25$, $\lambda = 0{,}6$.

Таблица 2

Расстояние Колмогорова при r = 0,25, λ = 0,6

μt	Δ
1,00	0,088
0,50	0,051
0,10	0,012
0,05	0,006

Данный пример позволяет сделать вывод о том, что на асимптотические результаты влияет не только продолжительность рассматриваемого периода времени и времени обслуживания заявок, но и вероятность их возврата в систему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеева, С. П.* Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями / С. П. Моисеева, И. А. Захорольная // Автометрия. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2011. Т. 47. № 6. С. 51–58.

2. *Морозова, А. С.* Исследование экономико-математической модели влияния ценовой скидки для постоянных клиентов на прибыль коммерческой организации / А. С. Морозова, С. П. Моисеева, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 293. С. 49–52.

3. *Жидкова, Л. А.* Математическая модель потоков покупателей двухпродуктовой торговой компании в виде системы массового обслуживания с повторными обращениями к блокам / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322, № 6, С. 5–9.

4. *Морозова, А. С.* Исследование математических моделей стимулирования сбыта продукции: дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / А. С. Морозова. Анжеро-Судженск, 2007. 115 с.

5. *Назаров, А. А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

6. *Жидкова, Л. А.* Исследование системы GI|M|∞ с повторными обращениями / Л. А. Жидкова, С. П. Моисеева // Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая: Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы II Всероссийской молодежной научной конференции. Томск, 2014. Т. 295. С. 94–100.