СЕТИ С НЕСКОЛЬКИМИ ТИПАМИ ЗАЯВОК И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕННОМ КОЛИЧЕСТВЕ ЗАЯВОК В УЗЛЕ

Ю. Е. Дудовская, О. В. Якубович

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Гомель, Беларусь
E-mail: dudovskaya@gmail.com

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком заявок, экспоненциальным обслуживанием и марковской маршрутизацией. Заявки, циркулирующие в сети, могут быть различных типов. Узлы функционируют в нескольких режимах, отвечающих различной степени их работоспособности. Время переключения с одного режима работы в другой имеет показательное распределение, переключение возможно только в соседние режимы и при определенном количестве заявок в узле, во время переключения режимов число заявок в узлах не меняется. Устанавливаются условия эргодичности, достаточные условия существования и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний в мультипликативной форме.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, различные типы заявок, многорежимное обслуживание, стационарное распределение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В сеть, состоящую из N узлов, поступает простейший поток заявок с параметром λ. Заявки могут быть M типов. Каждая заявка входящего потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}$, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M} p_{0(i,u)} = 1$.

Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы $\left(l_i = \overline{0,r_i}, i = \overline{1,N}\right)$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))$, где $x_i(t) = \left(\overline{x}_i(t), l_i(t)\right) = \left(x_{i1}(t), x_{i2}(t), \ldots, x_{in(i)}(t), l_i(t)\right)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $x_{i1}(t)$ – тип заявки, которая находится на обслуживании, $x_{ih}(t)$ – тип заявки, которая находится $(h-1)$-ой $\left(h = \overline{2,n(i)}\right)$ в очереди, $n(i)$ – число заявок в i-ом узле, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла в момент времени t. Процесс $x_i(t)$ имеет пространство состояний

$$X_i = \left\{(\overline{x}_i, l_i) = (0, l_i), (x_{i1}, l_i), (x_{i1}, x_{i2}, l_i), \ldots : x_{ik} = \overline{1,M}, k \ge 1, l_i = \overline{0,r_i}\right\}.$$

Пусть длительности обслуживания заявок в узлах не зависят от процесса поступления, независимы между собой. Длительность обслуживания заявки в i-ом узле, находящемся в состоянии $x_i \in X_i$, имеет показательное распределение с параметром $\mu_i(n(i), l_i)$.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i = (\bar{x}_i, l_i)$, в режиме l_i $\left(l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i(\bar{x}_i, l_i)$ i-ый узел переходит в $(l_i + 1)$-ый режим $\left(l_i = \overline{0, r_i - 1}\right)$, а с интенсивностью $\varphi_i(\bar{x}_i, l_i)$ – в $(l_i - 1)$-ый режим $\left(l_i = \overline{1, r_i}\right)$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Предположим, что переключение режимов возможно только при определенном количестве заявок в узле. Пусть для каждого узла i существует значение $M(i) \geq 0$ такое, что интенсивности $\nu_i(\bar{x}_i, l_i) > 0$, $\varphi_i(\bar{x}_i, l_i) > 0$ для всех $n(i) \geq M(i)$ и $\nu_i(\bar{x}_i, l_i) = 0$, $\varphi_i(\bar{x}_i, l_i) = 0$ для $n(i) < M(i)$.

Заявка типа u после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть,

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{v=1}^{M} p_{(i,u)(j,v)} + p_{(i,u)0} = 1, \quad i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}.$$

Предполагается, что матрица маршрутизации $\left(p_{(i,u)(j,v)} : i,j = \overline{1, N}; u,v = \overline{1, M}\right)$, где $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_{iu} = p_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{v=1}^{M} \varepsilon_{jv} p_{(j,v)(i,u)}, \quad i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}. \tag{1}$$

Полученная система уравнений имеет единственное положительное решение $\left(\varepsilon_{iu}, i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}\right)$, что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [1].

Процесс $x(t)$ является однородным марковским процессом с непрерывным временем и пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где X_i – пространство состояний i-го узла.

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЕТИ

Рассмотрим изолированный i-ый узел в фиктивной окружающей среде (окружающая среда является фиктивной, т.к. в сети суммарные потоки заявок в узлы, вообще говоря, не являются простейшими), предполагая, что в него поступают M независимых простейших потоков заявок с интенсивностями $\lambda\varepsilon_{i1}, \lambda\varepsilon_{i2}, \ldots, \lambda\varepsilon_{iM}$, где $\left(\varepsilon_{iu}, i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}\right)$ – решение системы уравнений трафика (1). Обозначим через $\alpha_{iu} = \lambda\varepsilon_{iu}$ интенсивность поступления заявок типа u в i-ый узел, $\alpha_i = \lambda \sum_{u=1}^{M} \varepsilon_{iu}$ – суммарная интенсивность поступления заявок в i-ый узел.

Пусть $\{p_i(x_i),\ x_i \in X_i\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x_i(t)$. Предположим, что i-ый узел обратим. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

для $0 < n(i) < M(i)$

$$\alpha_{ix_{in(i)}} p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)-1}, l_i) = \mu_i(n(i), l_i) p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i),$$

для $n(i) \geq M(i)$

$$\alpha_{ix_{in(i)}} p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)-1}, l_i) = \mu_i(n(i), l_i) p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i),$$

$$\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i - 1) p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i - 1) =$$
$$= \varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i) p_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i),$$
$$n(i) \neq 0,\ l_i = \overline{1, r_i},\ i = \overline{1, N}.$$

Лемма. Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий

$$\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i - 1) \mu_i(n(i), l_i) \varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)-1}, l_i) =$$
$$= \nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)-1}, l_i - 1) \mu_i(n(i), l_i - 1) \varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, l_i), \quad (2)$$
$$n(i) \geq M(i),\ l_i = \overline{1, r_i},\ i = \overline{1, N}.$$

При выполнении (2) для эргодичности процесса $x_i(t)$ достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n(i)=M(i)}^{\infty} \sum_{l_i=0}^{r_i} q(x_i) \prod_{b=1}^{l_i} \frac{\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, b-1)}{\varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, b)} \prod_{c=1}^{n(i)} \frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c, 0)},$$

где $q(x_i) = \alpha_i + \mu_i(n(i), l_i) I_{(n(i) \neq 0)} + \nu_i(x_i) I_{(l_i \neq r_i)} + \varphi_i(x_i) I_{(l_i \neq 0)}$ – интенсивность выхода из состояния x_i. Стационарное распределение процесса $x_i(t)$ определяется соотношениями

$$p_i(x_i) = \prod_{a=n(i)+1}^{M(i)} \frac{\mu_i(a, l_i)}{\alpha_{ix_{ia}}} \prod_{b=1}^{l_i} \frac{\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM(i)}, b-1)}{\varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM(i)}, b)} \prod_{c=1}^{M(i)} \frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c, 0)} p_i(0) \quad (3)$$

для $0 \leq n(i) < M(i)$;

$$p_i(x_i) = \prod_{b=1}^{l_i} \frac{\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, b-1)}{\varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, b)} \prod_{c=1}^{n(i)} \frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c, 0)} p_i(0) \quad (4)$$

для $n(i) \geq M(i)$.

Здесь произведение, в котором нижний индекс больше верхнего, равно единице. Состояние 0 – это такое состояние узла, когда в нем отсутствуют заявки, и узел функционирует в нулевом режиме. Вероятность указанного состояния имеет вид

$$p_i(0) = [\sum_{n(i)=0}^{M(i)-1} \sum_{l_i=0}^{r_i} \prod_{a=n(i)+1}^{M(i)} \frac{\mu_i(a, l_i)}{\alpha_{ix_{ia}}} \prod_{b=1}^{l_i} \frac{\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM(i)}, b-1)}{\varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iM(i)}, b)} \prod_{c=1}^{M(i)} \frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c, 0)} +$$
$$+ \sum_{n(i)=M(i)}^{\infty} \sum_{l_i=0}^{r_i} \prod_{b=1}^{l_i} \frac{\nu_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, b-1)}{\varphi_i(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in(i)}, b)} \prod_{c=1}^{n(i)} \frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c, 0)}]^{-1}.$$

Теорема. Если для всех $i = \overline{1, N}$ выполняются условия обратимости (2) и сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{n(i)=M(i)}^{\infty}\sum_{l_i=0}^{r_i} q(x_i)\prod_{b=1}^{l_i}\frac{\nu_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, b-1\right)}{\varphi_i\left(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in(i)}, b\right)}\prod_{c=1}^{n(i)}\frac{\alpha_{ix_{ic}}}{\mu_i(c, 0)},$$

то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)...p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где $p_i(x_i)$ определяется по формулам (3)–(4).

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера [2].

Исследованная сеть массового обслуживания является частным случаем сети с многорежимным обслуживанием, когда переключение режимов возможно при любом количестве заявок в узле [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jackson, J. R.* Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. 1963. V. 10. № 1. P. 131–142.

2. *Бочаров, П. П.* Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. М. : РУДН, 1995. 529 с.

3. *Летунович, Ю. Е.* Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием / Ю. Е. Летунович // Современные информационные компьютерные технологии: сб. науч. ст. междунар. науч. конф. Гродно, 2008. С.97–99.