СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА СИСТЕМ

Ю. Г. Дмитриев, Ф. П. Тарасенко, Ю. К. Устинов

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: dmit@mail.tsu.ru, ftara@mfu.tsu.ru, ustinov-yuk@rambler.ru

Излагается математическая модель роста одного из подклассов растущих систем. Модель позволяет выявить некоторые неизвестные ранее закономерности процесса роста, что даёт возможность более эффективно осуществлять практическое взаимодействие с такими системами. Приводятся примеры, иллюстрирующие эти закономерности.

Ключевые слова: растущая система, природная совокупность, распределение Кептэйна, квантили равностоящих уровней, критерии Шапиро – Уилка и хи-квадрат.

ВВЕДЕНИЕ

Успешность любой целенаправленной деятельности человека зависит, прежде всего, от того, насколько адекватна его модель объекта деятельности. Поэтому наша познавательная деятельность направлена на всемерное совершенствование моделей реальности, которую мы стремимся изменить в соответствии с поставленной целью. И самой важной информацией становится знание того, какие изменения происходят в Природе и каков механизм каждого конкретного изменения; т.е. актуальной задачей является построение как можно более адекватных моделей процессов, происходящих с интересующими нас системами.

«Всё течёт, всё изменяется», заметили ещё наши далёкие предки; при этом изменения в Природе носят самый разнообразный характер. Бесконечное разнообразие изменений системы укрупнённо отображают конечным разнообразием их классов. Например, для многих целей применяется классификация *монотонных* изменений по характеру их «направленности»: функционирование, рост, развитие, спад, деградация. «Механизмы» этих процессов различны; и, при желании использовать то или иное изменение в наших целях, необходимо знание природы соответствующего процесса. А в ряде случаев необходимо знание и механизмов краткосрочных изменений: возникновения, качественного преобразования или гибели системы. В каждой области знания разрабатываются и совершенствуются модели изменений систем; наиболее общие, претендующие на универсальность подходы к моделированию изменений развивают философия (изучение генезиса и онтогенеза систем) и общая теория систем (динамика систем, синергетика). Во всех случаях вожделенной целью является построение адекватной *математической* модели.

В данной работе авторы излагают модель *роста* одного из подклассов *растущих* систем. Эта модель позволила выявить некоторые неизвестные ранее закономерности процесса роста, что даёт возможность более эффективно осуществлять практическое взаимодействие с такими системами.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА СИСТЕМЫ

Отличительным признаком *роста* от других типов изменений является *увеличение со временем определённой* ***количественной*** *характеристики* рассматриваемой системы. Причины и механизмы роста могут быть различными. Растёт температура или артериальное давление у пациента; растёт количество могил на городском кладбище; растёт дерево и ребёнок; растёт температура и давление в паровом котле; растёт депозитный счёт в банке; растёт число особей в популяции живых организмов; растёт расстояние от отправного пункта вашего путешествия, растёт степень враждебности конфликтующих сторон. Закономерности роста зависят от того, каков механизм (алгоритм) увеличения данной ***числовой*** характеристики.

Наша работа над развитием теории роста систем началась с сотрудничества с геологами, исследующими особенности месторождений полезных ископаемых. Рост *месторождения* происходит в результате *накопления* соответствующего вещества (руды, нефти, газа, воды) в нескольких соседствующих *рудных телах* или *залежах*, которые назовем ячейками. Накопление в каждой ячейке происходит за счёт распределения между всеми ячейками потока вещества, исходящего из одного источника. В результате образуется *растущая система* из нескольких соседствующих ячеек общего происхождения, называемая *природной совокупностью* [1–4].

Математическая модель роста таких систем учитывает следующие их специфические особенности:

1) Система состоит из N раздельных частей (ячеек накопления).

2) Связующим («системообразующим») фактором является генетическая и физическая *однородность* накапливаемого вещества во всех частях.

3) Процесс накопления в каждой части можно описать как итеративное, пошаговое присоединение определённой (случайной) порции вещества q к ранее накопленному x:

$$x_k^{i+1} = x_k^i + q_k^{i+1} = x_k^i + z_k^{i+1} \cdot g_k(x_k^i), \quad i = \overline{0, L-1}, \quad k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где i – номер шага в итеративном процессе, k – номер ячейки накопления, z^i_k – случайная величина, отображающая пространственно-временные неравномерности общего потока вещества, $g_k(x)$ – функция, описывающая закономерность захвата вещества данной ячейкой (например, приращение может не зависеть от накопленной массы, либо быть пропорциональным объёму, или поверхности ранее накопленного вещества), L – период накопления.

В итоге уравнение (1) описывает рост системы как N-мерный случайный процесс, характер которого определяется свойствами компонентов этого процесса, – случайной величины z и функции g. Исследование такого случайного процесса при конкретных предположениях о свойствах z и g дало интересные результаты [5–8], среди которых два представляются важными для практики:

А. Если $\{z^i_k\}$ – независимые и одинаково распределённые величины с ограниченными первыми двумя моментами, а функции $g_k(x) > 0$ при $x > 0$, то асимптотические (при $L \to \infty$) распределения накопленных запасов X_k являются распределениями Кептэйна с параметрами, зависящими от моментов z и вида функций g. Например, при $g_k(x) = Const$, распределения X_k нормальны, а при $g_k(x) = Const \cdot x$, – логнормальны.

Б. Существуют преобразования, которые переводят упорядоченные по величине значения X_k накопленных масс в N ячейках в квантили нормального распределения равноотстоящих уровней $p_k = (2k-1)/2N, \ k = \overline{1, N}$.

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ

Изначально статистическая модель роста систем создавалась под геологические задачи разведки и эксплуатации месторождений полезных ископаемых, генезис которых имеет ярко выраженный характер накопления, как для руд (твёрдых осадочных пород), так и для месторождений жидких и газообразных углеводородов. Обнаруженные закономерности позволили существенно повысить эффективность методов решения некоторых задач георазведки (оценка перспективности разведочного бурения) и задач эксплуатации (прекращение поиска новых залежей при полной разведанности месторождения). На основе открытых закономерностей были разработаны алгоритмы и программы решения таких задач с учётом целого ряда дополнительных особенностей реальной геологической практики [9, 10]. Их ретроспективное применение к данным реальных месторождений на разных континентах показало, что доля «сухих» разведочных скважин (доходящая до 80%) может быть сокращена в разы, что факт полной разведанности месторождения может быть установлен на 5 лет раньше существующей практики. С учётом высокой стоимости буровых работ и наносимого ими ущерба природной среде, экономический и экологический эффекты очевидны. Однако, отечественные и зарубежные компании не восприняли нашего предложения оказывать им услуги по решению таких проблем. Проявилась общая закономерность: в мире до коммерциализации доходит не более 10% инноваций. Всякая система сопротивляется изменениям; в нашем случае это вызвано тем, что рыночные цены на природные ресурсы и без нас с лихвой покрывают все производственные и накладные расходы, а кроме того, буровым компаниям и вовсе невыгодна возможность резкого сокращения заказов на бурение скважин в случае внедрения нашей инновации: им платят не за результативность скважин, а за их погонные метры.

Зато хорошей новостью стало обнаружение применимости нашей модели к другим, не геологическим системам. Внешнее подобие геометрии систем разной природы структуре геологических природных совокупностей подтолкнуло к мысли, что и в других растущих системах рост происходит с участием процессов накопления.

Была сделана попытка проверить общность теории растущих систем на различных конкретных примерах. Эмпирические данные о «массах» частей были собраны для следующих систем:

– чистая колония бактерий,
– березовый лес, отдельные деревья,
– население городов Армении, Франции и Англии,
– население департаментов Франции.

Площади бактериальных пятен на поверхности питательного бульона измерялись в лаборатории биолого-почвенного факультета ТГУ. Кафедра лесоводства ТГУ любезно представила результаты измерения биомасс групп деревьев в березовом лесу, отдельных деревьев в них и отдельных ветвей на дереве. Демографические данные извлекались из справочников. Во всех случаях наилучшую аппроксимацию дало логнормальное распределение.

Это позволяет утверждать, что прирост масс в этих системах происходит пропорционально ранее накопленной массе (это следует из развиваемой авторами теории растущих систем). Степень достоверности этого вывода проверялась с помощью критериев согласия Шапиро – Уилка (W-тест) и Пирсона (x^2). Вероятность принадлежности данных к логнормальному распределению приведена в таблице 1. Известно, что W-тест отвергает неверную модель чаще x^2-теста, так что левая колонка цифр более надежна.

Таблица 1

Система	Вероятность согласия	
	W-тест	x^2-тест
Колонии бактерий	0.8110	-
Департаменты Франции	0.9970	0.9922
Города Франции	0.9998	0.9635
Города Армении	0.9771	0.6216
Города Англии	0.9991	0.8487
Группы деревьев в лесу	0.9992	0.9163
Деревья в группе	0.8612	0.9655
Дерево № 20	0.8175	0.8011
Деревом" 42	0.9354	0.7546
Дерево N-47	0.9653	0.7276
Дерево № б1	0.9555	0.9167
Дерево № б5	0.9644	-
Дерево № 67	0.7193	0.9387

Пожалуй, наиболее интересный вывод из этих расчетов состоит в том, что хотя растущую систему можно подразделять на разные уровни укрупненности (лес-группы-деревья-ветви; население страны-департаментов-городов; и т.п.), закономерности организации остаются одинаковыми на всех уровнях. Похоже, существует некий универсальный закон Природы, управляющей организацией растущих систем на всех их уровнях (просматривается аналогия с математической теорией фракталов, с теорией организационных мультинодов С. Бира в менеджменте и пр.). Интересно проверить правдоподобность этой гипотезы на примере систем с другими типами накопления.

Обнаруженная закономерность может быть выражена в виде линейной регрессивной зависимости между логарифмом накопленных масс частей системы и квантилями нормального распределения (в силу Б). В качестве иллюстрации приведем несколько примеров (рис. 1 – 3).

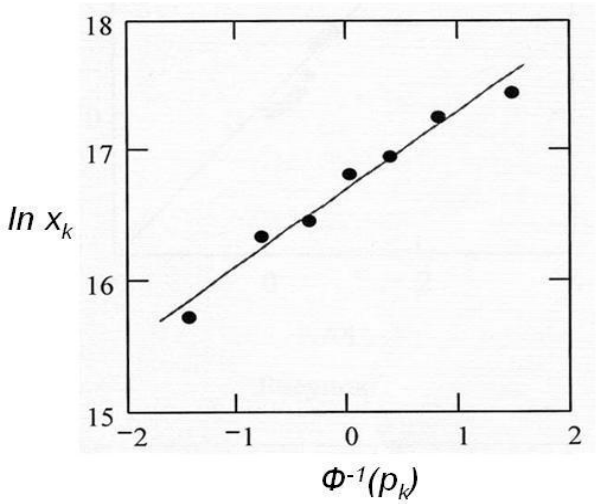

Рис. 1. Регрессия логарифма численности населения восьми округов Российской Федерации по квантилям стандартного нормального распределения

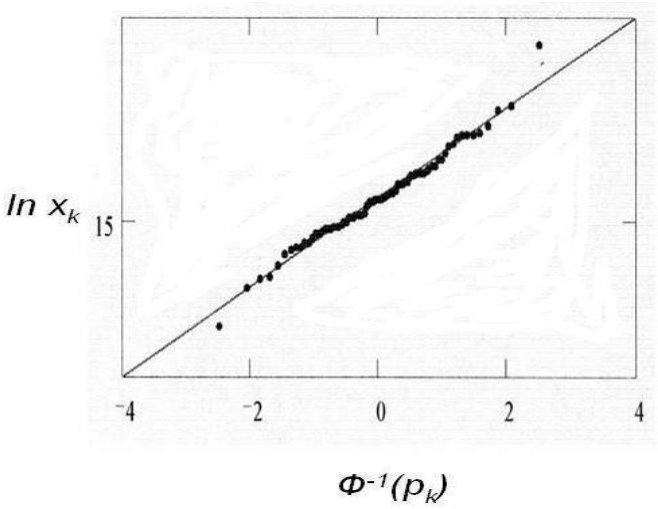

Рис. 2. Регрессия налогов в 89 регионах России по квантилям стандартного нормального распределения

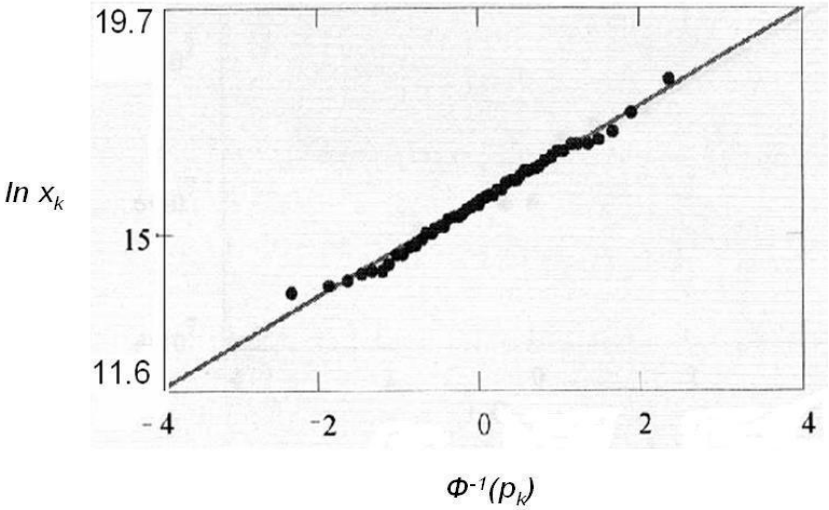

Рис. 3. Регрессия сбора налогов в 50 штатах США по квантилям стандартного нормального распределения

Проявление обсуждаемой закономерности выглядит весьма убедительно. Интересно, что выбросы на краях выборки на рис. 2 соответствуют Москве и Чукотке. Это говорит о том, что накопление в этих ячейках выпадает из общей закономерности. Интересно выяснить, каковы конкретные отличия механизмов накопления в них от общесистемного.

Авторы намерены продолжить развитие статистической теории жизненного цикла природных систем.

Статья подготовлена в рамках программы повышения конкурентоспособности ТГУ (Tomsk State University Competitiveness Improvement Program).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев, Ф. Н.* Теория накопления и прогнозирования запасов полезных ископаемых / Ф. Н. Алексеев. Томск : Изд-во Томского ун-та, 1996. 172 с.

2. *Алексеев, Ф. Н.* Вероятностная теория формирования минеральных ресурсов / Ф. Н. Алексеев, Ю. К. Устинов // Непараметрические и робастные статистические методы в кибернетике и информатике. Томск : Изд-во Томского ун-та, 1990. Ч. 1. С. 32–43.

3. *Алексеев, Ф. Н.* Статистическая структура природных совокупностей объектов, образованных путем накопления / Ф. Н. Алексеев, Ю. Г. Дмитриев, Ю. К. Устинов // Приложения статистических методов в производстве и управлении. Пермь, 1990. Т. 1. С. 1.

4. *Алексеев, Ф. Н.* Теория образования месторождений полезных ископаемых и практика ее применения / Ф. Н. Алексеев, В. Н. Ростовцев. Томск : STT, 2004. 316 с.

5. *Дмитриев, Ю. Г.* О математических моделях природных совокупностей месторождений полезных ископаемых / Ю. Г. Дмитриев, Ф. П. Тарасенко, Ю. К. Устинов // Информационные системы и технологии ИСТ-2000. Новосибирск, НГТУ, 2000. Т. 2. С. 286–288.

6. *Дмитриев, Ю. Г.* On Statistical Structure of Growing Systems / Ю. Г. Дмитриев, Ф. П. Тарасенко, Ю. К. Устинов // Труды X юбилейного симпозиума по непараметрическим и робастным статистическим методам в кибернетике. Томск : Изд-во Томского ун-та, 2004. С. 179–185.

7. *Дмитриев, Ю. Г.* Математические модели растущих систем / Ю. Г. Дмитриев, Ю. К. Устинов // Вычислительные технологии. СО РАН. 2007. Т. 12. Специальный выпуск 1. С. 68–75.

8. *Dmitriev, Yu. G.* Towards a Modeling of Natural Systems / Yu. G. Dmitriev, F. P. Tarasenko // Cybernetics and Systems. 2009. V. 40, № 3. P. 236–248.

9. *Дмитриев, Ю. Г.* Автоматизированная система «Октава» для геологического прогнозирования / Ю. Г. Дмитриев, П. Ф. Тарасенко // Вычислительные технологии. СО РАН. 2003. Т. 8. С. 74–91.

10. *Дмитриев, Ю. Г.* Интерпретация геологических данных с использованием компьютерных технологий / Ю. Г. Дмитриев, П. Ф. Тарасенко // Известия Томского политехнического университета. 2008. Т. 313. № 5. С. 119–123.