СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ю. С. Боярович, Ю. Е. Дудовская

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
Гомель, Беларусь
E-mail: dudovskaya@gmail.com

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности узлов. Переключение с одного режима работы в другой возможно только в соседние режимы, во время переключения режимов число заявок в узлах не меняется. Заявки, ожидающие обслуживания в узлах сети, могут становиться временно неактивными. Неактивные заявки формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние. Устанавливаются условия эргодичности, достаточные условия существования и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний в мультипликативной форме.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, неактивные заявки, многорежимное обслуживание, стационарное распределение.

ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ СЕТИ

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N узлов. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые требуют обслуживания, и временно неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ. Каждая заявка входящего потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел с вероятностью p_{0i}, $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$. Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i = \overline{1, N}$. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью ν_i, уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i-ый узел с интенсивностью φ_i, уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i-ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы $\left(l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}\right)$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), ..., z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n_i'(t), l_i(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$, $n_i'(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i-ом узле в момент времени t, $l_i(t)$ – режим функционирования i-го узла. Пространство состояний случайного процесса $z_i(t)$ имеет вид

$$Z_i = \{z_i = \left(n_i, n_i', l_i\right) : n_i, n_i' \geq 0,\ l_i = \overline{0, r_i}\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i-ом узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n_i'. Поступающий в узел i сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n_i' + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n_i', которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = \left(n_i, n_i', l_i\right)$, в режиме l_i $\left(l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\tau_i\left(n_i, n_i', l_i\right)$ $\left(\tau_i\left(n_i, n_i', l_i\right) > 0\right)$ i-ый узел переходит в $\left(l_i + 1\right)$-ый режим $\left(l_i = \overline{0, r_i - 1}\right)$, а с интенсивностью $\rho_i\left(n_i, n_i', l_i\right)$ $\left(\rho_i\left(n_i, n_i', l_i\right) > 0\right)$ – в $\left(l_i - 1\right)$-ый режим $\left(l_i = \overline{1, r_i}\right)$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Времена обслуживания активных заявок независимы и имеют показательное распределение с параметром $\mu_i\left(l_i\right)$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Заявки обслуживаются в порядке поступления.

Каждая заявка после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел с вероятностью p_{ij} $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1, i = \overline{1, N}\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $p_{ii} = 0,\ i = \overline{1, N}$.

Предполагается, что матрица вероятностей переходов $\left(p_{ij} : i, j = \overline{0, N}\right)$, где $p_{00} = 0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j p_{ji}. \qquad (1)$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $\left(\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\right)$ [1].

Процесс $z_i(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний $Z = Z_1 \times Z_2 \times ... \times Z_N$, где Z_i – пространство состояний i-го узла.

ИЗОЛИРОВАННЫЙ УЗЕЛ

Рассмотрим изолированный i-ый узел в фиктивной окружающей среде (окружающая среда является фиктивной, т.к. в сети суммарные потоки заявок в узлы, вообще говоря, не являются простейшими), предполагая, что в него поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda\varepsilon_i$, где $\left(\varepsilon_i,\, i=\overline{1,N}\right)$ – решение системы уравнений трафика (1).

Пусть $\{p_i(z_i),\, z_i \in Z_i\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z_i(t)$. Предположим, что i-ый узел обратим. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

$$\begin{gathered}
\lambda\varepsilon_i p_i(n_i-1,n_i',l_i) = p_i(n_i,n_i',l_i)\mu_i(l_i),\\
\nu_i p_i(n_i+1,n_i'-1,l_i) = \varphi_i p_i(n_i,n_i',l_i),\\
\tau_i(n_i,n_i',l_i-1)p_i(n_i,n_i',l_i-1) = \rho_i(n_i,n_i',l_i)p_i(n_i,n_i',l_i),\\
n_i, n_i' \neq 0,\ l_i=\overline{1,r_i},\ i=\overline{1,N}.
\end{gathered}$$

Из уравнений обратимости находим стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла

$$p_i(n_i,n_i',l_i) = \left(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(l_i)}\right)^{n_i+n_i'}\prod_{s=1}^{l_i}\frac{\tau_i(0,0,s-1)}{\rho_i(0,0,s)}p_i(0,0,0). \tag{2}$$

Здесь ε_i – решение системы уравнений трафика (1),

$$p_i(0,0,0) = \left(\sum_{(n_i,n_i',l_i)\in Z_i}\left(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(l_i)}\right)^{n_i+n_i'}\prod_{s=1}^{l_i}\frac{\tau_i(0,0,s-1)}{\rho_i(0,0,s)}\right)^{-1}.$$

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЕТИ

Обозначим через $[(n_i,\, n_i',\, l_i)]$ N-мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все координаты, кроме i-ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i-ая координата равна $(n_i,\, n_i',\, l_i) \in Z_i$. Через $[(n_i,\, n_i',\, l_i),(n_j,\, n_j',\, l_j)]$ обозначим N-мерный вектор $\tilde{z} \in Z$, у которого все координаты, кроме i-ой и j-ой, совпадают с координатами вектора $z \in Z$, а i-ая координата равна $(n_i,\, n_i',\, l_i) \in Z_i$, j-ая координата равна $(n_j,\, n_j',\, l_j) \in Z_j$. Если $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $z(t)$ из состояния $x \in Z$ в состояние $y \in Z$, $q(x) = \sum_{y\neq x} q(x,\, y)$ – интенсивность выхода из состояния x, то интенсивности переходов процесса $z(t)$ имеют вид

$$\begin{gathered}
q(z,[(n_i+1,n_i',l_i)]) = \lambda p_{0i},\\
q(z,[(n_i-1,n_i'+1,l_i)]) = \nu_i I_{(n_i\neq 0)},\\
q(z,[(n_i+1,n_i'-1,l_i)]) = \varphi_i I_{(n_i'\neq 0)},\\
q(z,[(n_i-1,n_i',l_i)]) = \mu_i(l_i)p_{i0}I_{(n_i\neq 0)},\\
q(z,[(n_i,n_i',l_i-1)]) = \rho_i(n_i,n_i',l_i)I_{(l_i\neq 0)},
\end{gathered}$$

$$q(z,[(n_i,n_i',l_i+1)])=\tau_i(n_i,n_i',l_i)I_{(l_i\neq r_i)},$$
$$q(z,[(n_i-1,n_i',l_i),(n_j+1,n_j',l_j)])=\mu_i(l_i)p_{ij}I_{(n_i\neq 0)},$$
$$i,\ j=\overline{1,N},\ z\in Z.$$

Для всех остальных состояний $y\in Z$ $q(x,y)=0$. Интенсивность выхода получается сложением указанных интенсивностей:

$$q(z)=\lambda+\sum_{i=1}^{N}\mu_i(l_i)I_{(n_i\neq 0)}+\sum_{i=1}^{N}\left[\nu_i I_{(n_i\neq 0)}+\varphi_i I_{(n_i'\neq 0)}\right]+\sum_{i=1}^{N}\left[\rho_i(z_i)I_{(l_i\neq 0)}+\tau_i(z_i)I_{(l_i\neq r_i)}\right],\quad z\in Z. \qquad (3)$$

Теорема. Если для всех $i=\overline{1,N}$ выполняются условия обратимости

$$\tau_i(n_i,n_i'-1,l_i-1)\rho_i(n_i,n_i',l_i)\mu_i(l_i-1)=\tau_i(n_i,n_i',l_i-1)\rho_i(n_i,n_i'-1,l_i)\mu_i(l_i),$$
$$n_i,\ n_i'\neq 0,\ l_i=\overline{1,r_i},$$

и сходится ряд

$$\sum_{z\in Z}q(z)\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{\nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'}\left(\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(l_i)}\right)^{n_i+n_i'}\prod_{s=1}^{l_i}\frac{\tau_i(0,0,s-1)}{\rho_i(0,0,s)},$$

где $q(z)$ – интенсивность выхода из состояния *z*, определяемая равенством (3), то марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(z)=p_1(z_1)p_2(z_2)...p_N(z_N),\quad z\in Z,$$

где $p_i(z_i)$ определяется по формуле (2).

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера [2].

Исследованная сеть массового обслуживания является обобщением сети, которая рассматривалась в работе [3], на случай многорежимного облуживания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jackson, J. R.* Jobshop-like Queueing Systems / J. R. Jackson // Manag. Sci. 1963. V. 10. № 1. P. 131 142.

2. *Бочаров, П. П.* Теория массового обслуживания: учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. М. : РУДН, 1995. 529 с.

3. *Tsitsiashvili, G. Sh.* Distributions in stochastic network models / G. Sh. Tsitsiashvili, M. Osipova. NY : Nova Publishers Incorporated, 2008. 75 p.