ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ СОСЕДНИМИ СОБЫТИЯМИ МОДУЛИРОВАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА СОБЫТИЙ ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

М. А. Бахолдина, А. М. Горцев

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: maria.bakholdina@gmail.com

Рассматривается модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, являющийся одной из математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в телекоммуникационных и информационно-вычислительных сетях связи, и относящийся к классу MAP-потоков событий. Функционирование потока рассматривается в условиях непродлевающегося мертвого времени. Находится явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий наблюдаемого потока.

Ключевые слова: модулированный обобщенный полусинхронный поток событий, мертвое время, плотность вероятностей длительности интервала.

ВВЕДЕНИЕ

Функционирование реальных систем массового обслуживания зависит от параметров и состояний входящих потоков событий. Вследствие этого при реализации адаптивного управления системой возникают, в частности, следующие задачи: задача фильтрации интенсивности потока [1] и задача оценивания неизвестных параметров потока [2] по наблюдениям за моментами наступления событий в потоке.

Настоящая работа является продолжением исследований, приведенных в [3], где решается задача оптимальной оценки состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий (далее – потока) в условиях его неполной наблюдаемости. Для решения задачи оценивания параметров потока, в первую очередь, необходимо знание его вероятностных свойств [4]. Вследствие этого в настоящей работе находится явный вид плотности вероятностей значений длительности интервала между моментами наступления соседних событий потока, учитывающей эффект непродлевающегося мертвого времени.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Интенсивность потока событий представляет собой кусочно-постоянный стационарный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями 1, 2: $\lambda(t) = \lambda_1$ либо $\lambda(t) = \lambda_2$

$(\lambda_1 > \lambda_2)$. Длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ (потока) в первом (во втором) состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром β (α). В течение временного интервала случайной длительности, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i, $i = 1{,}2$. Кроме того, переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_1; переход осуществляется с вероятностью p $(0 \le p \le 1)$; с вероятностью $1-p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое в момент наступления события пуассоновского потока интенсивности λ_2 невозможен. В момент окончания второго состояния процесса $\lambda(t)$ при его переходе из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ $(0 \le \delta \le 1)$ дополнительное событие в первом состоянии. В сделанных предпосылках $\lambda(t)$ – марковский процесс. Матрицы инфинитезимальных характеристик принимают вид:

$$D_0 = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\beta) & \beta \\ (1-\delta)\alpha & -(\lambda_2+\alpha) \end{Vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{Vmatrix} (1-p)\lambda_1 & p\lambda_1 \\ \delta\alpha & \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Элементами матрицы D_1 являются интенсивности переходов процесса $\lambda(t)$ из состояния в состояние с наступлением события. Недиагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности переходов из состояния в состояние без наступления события. Диагональные элементы матрицы D_0 – это интенсивности выхода процесса $\lambda(t)$ из своих состояний, взятые с противоположным знаком.

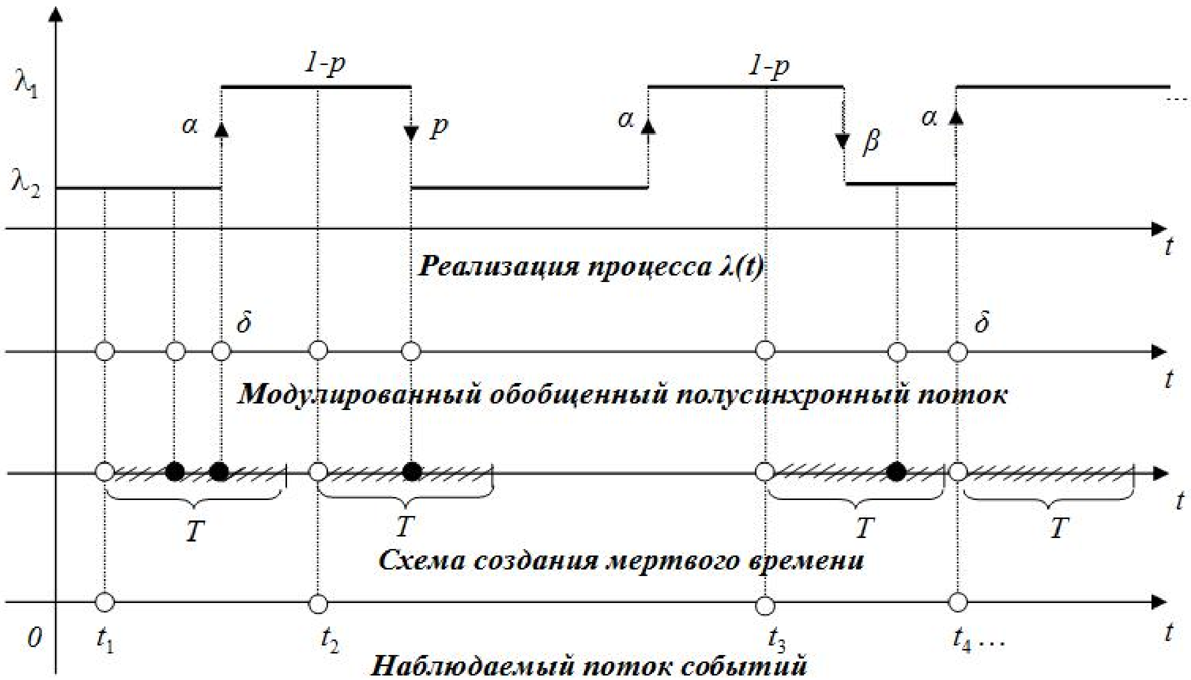

Рис. 1. Формирование наблюдаемого потока событий

После каждого зарегистрированного в момент времени t_k события наступает период мертвого времени фиксированной длительности T, в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. По окончании периода мертвого времени первое наступившие событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д. (непродлевающееся мертвое время). Вариант возникающей ситуации приведен на рис. 1, где λ_1, λ_2 – состояния процесса $\lambda(t)$; дополнительные события, которые могут наступать в первом состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое, помечены буквами δ; периоды мертвого времени длительности T помечены штриховкой; ненаблюдаемые события отображены черными кружками, наблюдаемые t_1, t_2, ... – белыми.

Отметим, что процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым (скрытый марковский процесс), а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий потока t_1, t_2, ... Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования потока событий. В силу предпосылок последовательность моментов наступления событий t_1, t_2, ..., t_k, ... образует вложенную цепь Маркова $\{\lambda(t_k)\}$, т.е. поток обладает марковским свойством, если его эволюцию рассматривать с момента наступления события t_k, $k=1,2,\ldots$. Обозначим через $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, $k=1,2,\ldots$, значение длительности k-го интервала между соседними событиями потока. Так как рассматривается стационарный режим, то плотность вероятностей значений длительности k-го интервала есть $p_T(\tau_k) = p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$, для любого k (индекс T подчеркивает, что плотность вероятностей зависит от длительности мертвого времени). В силу этого момент времени t_k без потери общности можно положить равным нулю, т.е. момент наступления события есть $\tau = 0$. В данной статье находится явный вид плотности вероятностей $p_T(\tau)$, $\tau \geq 0$.

ВЫВОД ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассмотрим интервал времени $(0,\tau)$ между соседними событиями в наблюдаемом потоке. Значение длительности данного интервала есть $\tau = T + t$, где t – значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и следующим событием наблюдаемого потока ($t \geq 0$). Пусть $p_{jk}(t)$ есть условная вероятность того, что на интервале $(0,t)$ нет событий наблюдаемого потока и $\lambda(t) = \lambda_k$ при условии, что в момент времени $t = 0$ значение процесса $\lambda(t)$ есть $\lambda(0) = \lambda_j$, $j,k = 1,2$. Соответствующую этой вероятности плотность вероятностей обозначим через $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j,k=1,2$. Введем в рассмотрение переходную вероятность $q_{ij}(T)$ – вероятность того, что за мертвое время длительности T процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i (момент времени $\tau = 0$) в состояние j (момент времени $\tau = T$), $i,j=1,2$, и вероятность $\pi_i(0\,|\,T)$ – условную (финальную) вероятность того, что процесс $\lambda(\tau)$ в момент времени $\tau = 0$ находится в состоянии i ($i=1,2$) при условии, что в этот момент времени наступило событие наблюдаемого потока, розыгрыш состояний произошел и наступил период мертвого времени длительности T. Тогда искомую плотность вероятностей $p_T(\tau)$ можно записать в виде

$$p_T(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau < T, \\ \sum_{i=1}^{2} \pi_i(0\,|\,T) \sum_{j=1}^{2} q_{ij}(T) \sum_{k=1}^{2} \tilde{p}_{jk}(\tau - T), & \tau \geq T. \end{cases} \tag{1}$$

Найдем явные выражения для $\tilde{p}_{jk}(\tau - T)$, $q_{ij}(T)$, $\pi_i(0\,|\,T)$, $i,j,k=1,2$.

Для вероятностей $p_{jk}(t)$ справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$p'_{11}(t) = -(\lambda_1+\beta)p_{11}(t) + \alpha(1-\delta)p_{12}(t), \quad p'_{12}(t) = -(\lambda_2+\alpha)p_{12}(t) + \beta p_{11}(t);$$
$$p'_{22}(t) = -(\lambda_2+\alpha)p_{22}(t) + \beta p_{21}(t), \quad p'_{21}(t) = -(\lambda_1+\beta)p_{21}(t) + \alpha(1-\delta)p_{22}(t)$$

с начальными условиями: $p_{11}(0)=1$, $p_{12}(0)=0$; $p_{22}(0)=1$, $p_{21}(0)=0$, решая которые, находим

$$\begin{aligned}
&p_{11}(t) = \frac{1}{z_2-z_1}[(\lambda_2+\alpha-z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_2+\alpha-z_2)e^{-z_2 t}], \quad p_{12}(t) = \frac{\beta}{z_2-z_1}(e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}),\\
&p_{21}(t) = \frac{\alpha(1-\delta)}{z_2-z_1}(e^{-z_1 t} - e^{-z_2 t}), \quad p_{22}(t) = \frac{1}{z_2-z_1}[(\lambda_1+\beta-z_1)e^{-z_1 t} - (\lambda_1+\beta-z_2)e^{-z_2 t}],\\
&z_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta-\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}),\\
&z_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\alpha+\beta+\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2-\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta(1-\delta)}), \quad 0<z_1<z_2.
\end{aligned} \tag{2}$$

В соответствии с определением модулированного обобщенного полусинхронного потока событий введем вероятность $p_{11}(t)e^{-\beta\Delta t}(1-e^{-\lambda_1\Delta t})(1-p) = p_{11}(t)\lambda_1(1-p)\Delta t + o(\Delta t)$ – совместную вероятность того, что без наступления событий потока процесс $\lambda(t)$ перешел на интервале $(0,t)$ из первого состояния в первое ($\lambda(0)=\lambda_1, \lambda(t)=\lambda_1$), и на полуинтервале $[t, t+\Delta t)$ первое состояние процесса $\lambda(t)$ не закончилось, и наступило событие пуассоновского потока интенсивности λ_1, при этом процесс $\lambda(t)$ остался в первом состоянии. Аналогичные совместные вероятности для различных *j* и *k* ($j,k=1,2$) примут вид

$$p_{11}(t)\lambda_1(1-p)\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{12}(t)\alpha\delta\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{11}(t)\lambda_1 p\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{12}(t)\lambda_2\Delta t+o(\Delta t),$$
$$p_{21}(t)\lambda_1(1-p)\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{22}(t)\alpha\delta\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{21}(t)\lambda_1 p\Delta t+o(\Delta t), \quad p_{22}(t)\lambda_2\Delta t+o(\Delta t).$$

Соответствующие плотности вероятностей выпишутся в виде

$$\tilde{p}_{11}^{(1)}(t) = p_{11}(t)\lambda_1(1-p), \quad \tilde{p}_{11}^{(2)}(t) = p_{12}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{12}^{(1)}(t) = p_{11}(t)\lambda_1 p, \quad \tilde{p}_{12}^{(2)}(t) = p_{12}(t)\lambda_2,$$
$$\tilde{p}_{21}^{(1)}(t) = p_{21}(t)\lambda_1(1-p), \quad \tilde{p}_{21}^{(2)}(t) = p_{22}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{22}^{(1)}(t) = p_{21}(t)\lambda_1 p, \quad \tilde{p}_{22}^{(2)}(t) = p_{22}(t)\lambda_2.$$

Тогда плотности вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$ того, что без наступления событий наблюдаемого потока на интервале $(0,t)$ и наступления события наблюдаемого потока в момент времени *t* процесс $\lambda(t)$ перейдет на этом интервале из состояния *j* в состояние *k*, запишутся для различных *j* и *k* ($j,k=1,2$) как

$$\begin{aligned}
&\tilde{p}_{11}(t) = p_{11}(t)\lambda_1(1-p) + p_{12}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{12}(t) = p_{11}(t)\lambda_1 p + p_{12}(t)\lambda_2,\\
&\tilde{p}_{21}(t) = p_{21}(t)\lambda_1(1-p) + p_{22}(t)\alpha\delta, \quad \tilde{p}_{22}(t) = p_{21}(t)\lambda_1 p + p_{22}(t)\lambda_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (2) в (3), получаем явный вид плотностей вероятностей $\tilde{p}_{jk}(t)$, $j,k=1,2$.

Для вероятностей $q_{ij}(\tau)$, $0 \le \tau \le T$, справедливы следующие системы дифференциальных уравнений:

$$q'_{11}(\tau) = -(p\lambda_1+\beta)q_{11}(\tau) + \alpha q_{12}(\tau), \quad q'_{12}(\tau) = (p\lambda_1+\beta)q_{11}(\tau) - \alpha q_{12}(\tau);$$
$$q'_{21}(\tau) = -(p\lambda_1+\beta)q_{21}(\tau) + \alpha q_{22}(\tau), \quad q'_{22}(\tau) = (p\lambda_1+\beta)q_{21}(\tau) - \alpha q_{22}(\tau)$$

с начальными условиями: $q_{11}(0)=1$, $q_{12}(0)=0$; $q_{22}(0)=1$, $q_{21}(0)=0$, решая которые, находим для $\tau = T$

$$q_{11}(T)=\pi_1+\pi_2 e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T},\quad q_{12}(T)=\pi_2-\pi_2 e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T},$$
$$q_{21}(T)=\pi_1-\pi_1 e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T},\quad q_{22}(T)=\pi_2+\pi_1 e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T},\qquad (4)$$
$$\pi_1=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+p\lambda_1},\quad \pi_2=\frac{\beta+p\lambda_1}{\alpha+\beta+p\lambda_1}.$$

Перейдем к нахождению вероятностей $\pi_i(0\,|\,T)$, $i=1,2$. Обозначим через π_{ij} переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента времени $\tau=0$ до момента наступления следующего события наблюдаемого потока и реализации последующего розыгрыша состояний потока, процесс $\lambda(\tau)$ перейдет из состояния i в состояние j ($i,j=1,2$). Так как моменты наступления событий наблюдаемого потока образуют вложенную цепь Маркова, то для вероятностей $\pi_i(0\,|\,T)$ справедлива следующая система уравнений

$$\pi_1(0\,|\,T)=\pi_1(0\,|\,T)\pi_{11}+\pi_2(0\,|\,T)\pi_{21},\quad \pi_2(0\,|\,T)=\pi_1(0\,|\,T)\pi_{12}+\pi_2(0\,|\,T)\pi_{22},$$
$$\pi_1(0\,|\,T)+\pi_2(0\,|\,T)=1.\qquad (5)$$

Введем в рассмотрение вероятность p_{ij} – переходную вероятность того, что за время, которое пройдет от момента $t=0$ (момента окончания мертвого времени) до момента наступления следующего события наблюдаемого потока, процесс $\lambda(t)$ перейдет из состояния i в состояние j ($i,j=1,2$). При этом вероятности p_{ij} определяются в виде

$$p_{ij}=\int_0^\infty \tilde{p}_{ij}(t)dt\,,\qquad (6)$$

где $\tilde{p}_{ij}(t)$ определены в (3), $p_{ij}(t)$ – в (2) ($i,j=1,2$). Вычисляя соответствующие интегралы (6), находим

$$p_{11}=\frac{1}{z_1z_2}[\lambda_1(1-p)(\lambda_2+\alpha)+\alpha\delta\beta],\quad p_{12}=\frac{1}{z_1z_2}[p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta],$$
$$p_{21}=\frac{1}{z_1z_2}[\lambda_1\alpha(1-p+p\delta)+\alpha\delta\beta],\quad p_{22}=\frac{1}{z_1z_2}[\lambda_2(\lambda_1+\beta)+p\lambda_1\alpha(1-\delta)],\qquad (7)$$

где $z_1z_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\alpha\delta\beta$.

Так как процесс $\lambda(t)$ является марковским, то полученные переходные вероятности $q_{ij}(T)$ и p_{ij}, $i,j=1,2$, позволяют выписать выражения для переходных вероятностей π_{ij}, $i,j=1,2$:

$$\pi_{11}=q_{11}(T)p_{11}+q_{12}(T)p_{21},\quad \pi_{12}=q_{11}(T)p_{12}+q_{12}(T)p_{22},$$
$$\pi_{21}=q_{21}(T)p_{11}+q_{22}(T)p_{21},\quad \pi_{22}=q_{22}(T)p_{22}+q_{21}(T)p_{12}.\qquad (8)$$

Подставляя в (8) сначала (4), затем (7), получаем

$$\pi_{11}=\frac{1}{z_1z_2}\left\{\lambda_1(1-p)(\lambda_2+\alpha)+\alpha\delta\beta-\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]\right\},$$
$$\pi_{12}=\frac{1}{z_1z_2}\left\{p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta+\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]\right\},\qquad (9)$$
$$\pi_{21}=\frac{1}{z_1z_2}\left\{\alpha\left[\lambda_1(1-p+p\delta)+\delta\beta\right]+\lambda_1\pi_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]\right\},$$

$$\pi_{22}=\frac{1}{z_1z_2}\left\{\lambda_2(\lambda_1+\beta)+p\lambda_1\alpha(1-\delta)-\lambda_1\pi_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]\right\}.$$

Далее, подставляя (9) в (5), находим выражения для $\pi_i(0\,|\,T)$, $i,\,j=1,2$:

$$\pi_1(0\,|\,T)=\frac{\alpha\left[\lambda_1(1-p+p\delta)+\delta\beta\right]+\lambda_1\pi_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]}{\lambda_1\alpha+(\beta+p\lambda_1)(\lambda_2+\alpha\delta)+\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]},$$

$$\pi_2(0\,|\,T)=\frac{p\lambda_1(\lambda_2+\alpha)+\lambda_2\beta+\lambda_1\pi_2\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]}{\lambda_1\alpha+(\beta+p\lambda_1)(\lambda_2+\alpha\delta)+\lambda_1\left[\lambda_2-p(\lambda_2+\alpha\delta)\right]\left[1-e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T}\right]}, \quad (10)$$

где π_1, π_2 определены в (4).

Подставляя в (1) сначала (3), затем (2), (4) и (10), выполняя при этом достаточно трудоемкие преобразования и учитывая, что $t=\tau-T$, получаем

$$p_T(\tau)=\begin{cases}0, & 0\le\tau<T,\\ \gamma(T)z_1e^{-z_1(\tau-T)}+(1-\gamma(T))z_2e^{-z_2(\tau-T)}, & \tau\ge T,\end{cases}$$

$$\gamma(T)=\frac{1}{z_2-z_1}\left[z_2-\lambda_1+(\lambda_1-\lambda_2-\alpha\delta)\pi_2(T)\right],$$

$$\pi_1(T)=\pi_1+\left[\pi_2-\pi_2(0\,|\,T)\right]e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T},$$

$$\pi_2(T)=\pi_2-\left[\pi_2-\pi_2(0\,|\,T)\right]e^{-(\alpha+\beta+p\lambda_1)T},$$

где z_i определены в (2); π_i – в (4); $\pi_i(0\,|\,T)$ – в (10), $i=1,2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты делают возможным решение задачи оценивания неизвестных параметров, задающих модулированный обобщенный полусинхронный поток событий в условиях непродлевающегося мертвого времени. В общем случае для оценки неизвестных параметров потока можно использовать метод моментов либо метод максимального правдоподобия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bushlanov, I. V.* Optimal estimation of the states of a synchronous double stochastic flow of events / I. V. Bushlanov, A. M. Gortsev // Automation and Remote Control. 2004. V. 65. Is. 9. P. 1389–1399.

2. *Vasil’eva, L. A.* Parameter estimation of a doubly stochastic flow of events under incomplete observability / L. A. Vasil’eva, A. M. Gortsev // Automation and Remote Control. 2003. V. 64. Is. 12. P. 1890–1898.

3. *Бахолдина, М. А.* Оптимальная оценка состояний модулированного обобщенного полусинхронного потока событий при непродлевающемся мертвом времени / М. А. Бахолдина, А. М. Горцев // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. № 1(26). С. 13–24.

4. *Бахолдина, М. А.* Плотность вероятностей длительности интервала между соседними событиями в модулированном обобщенном полусинхронном потоке / М. А. Бахолдина, А. М. Горцев // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: Материалы десятой Российской конференции с международным участием. Томск, 2014. С. 87–88.