

УДК 519.62:532.22

О МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
РАВНОВЕСНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. К. Полевилов

Как и большинство практически важных задач со свободной границей, задачи о равновесных формах капиллярной поверхности, как правило, имеют сложную нелинейную постановку. В общем случае имеем дело с гидродинамической задачей, неизвестное решение которой ищется в области с неизвестной заранее границей, определяемой по неизвестному же решению. Исчерпывающие обзоры методов теоретического исследования равновесных капиллярных поверхностей, представленные в [1, 2], показывают, что в современной вычислительной гидродинамике по существу не разработаны методы численного моделирования двухсвязных, несвязных, а также сильно искривленных односвязных поверхностей.

В [3 — 6] развит итерационно-разностный подход, который считается [2, с. 59] достаточно универсальным, поскольку в равной степени пригоден для построения как осесимметричных односвязных и двухсвязных, так и цилиндрических равновесных поверхностей (плоская задача). Добавим, что он эффективен при расчете сильно искривленных поверхностей и легко обобщается на класс несвязных поверхностей.

В настоящей работе предлагается новый, названный в силу конструктивных особенностей методом касательных, метод расчета капиллярных поверхностей, более экономичный и значительно менее чувствительный к деформации поверхности в сильных полях, чем предшествующие. Этот метод может служить также в качестве метода исследования устойчивости равновесного состояния, так как адекватно реагирует на физическое разрушение равновесных форм.

1. Итерационно-разностные схемы. Двумерную задачу о равновесной форме капиллярной поверхности сформулируем в следующем виде:

$$x'' + y'F = 0, \quad y'' - x'F = 0; \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1)$$

$$x(0) = a_0, \quad y(1) = b_1, \quad x'(0) = \cos \gamma_0, \quad y'(0) = \sin \gamma_0, \quad x'(1) = \cos \gamma_1, \quad y'(1) = \sin \gamma_1, \quad (2)$$

где $x(s)$ и $y(s)$ — неизвестные параметрические функции; s — длина дуги искомой равновесной линии $x(s)$, $y(s)$, $F = f + C$, $f = f(x, y, x', y', L)$ — заданная функция; C и L — константы, являющиеся функционалами от решения известного вида; a_0 , γ_0 , b_1 , γ_1 — заданные константы. Выражения для f и C могут содержать также функции от решения, аналитический вид которых неизвестен, но их численные значения определяются в результате решения некоторой дополнительной задачи, например о распределении магнитного поля или гидродинамическом процессе в объеме магнитной жидкости. Фигурирующие здесь x и y в случае плоской задачи являются декартовыми координатами поверхности, а в случае осесимметричной задачи им соответствуют цилиндрические координаты r , z .

Естественным свойством параметрических уравнений $x(s)$, $y(s)$ является тождество $x'^2 + y'^2 \equiv 1$. Из системы (1) легко видеть, что если указанное равенство выполнено при каком-либо одном значении s , то оно справедливо и для всех $s \in [0, 1]$. В силу этого при решении задачи (1), (2) можно пренебречь любым из последних четырех условий (2). Кроме того, одно из остальных трех условий формально потребовалось для определения зависимости константы C от решения (см. ниже п. 3).

На равномерной сетке $\{s_i = ih \mid i = \overline{0, N}; h = 1/N\}$ для задачи (1), (2) построим разностную схему второго порядка аппроксимации, обозначая разностное решение теми же буквами, что и точное решение:

$$\Lambda_1(x, y, F)|_i \equiv x_{\bar{s},i} + y_{s,i} F_i = 0, \quad \Lambda_2(x, y, F)|_i \equiv y_{\bar{s},i} - x_{s,i} F_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$x_0 = a_0, \quad x_{\bar{s},N} = \cos \gamma_1 + (h/2) F_N \sin \gamma_1; \quad y_{s,0} = \sin \gamma_0 + (h/2) F_0 \cos \gamma_0, \quad y_N = b_1, \quad (3)$$

где $F_i = f_i + C$, $f_i = f(x_i, y_i, x_{s,i}^*, y_{s,i}^*, L)$, $i = \overline{1, N-1}$, $f_0 = f(a_0, y_0, \cos \gamma_0, \sin \gamma_0, L)$, $f_N = f(x_N, b_1, \cos \gamma_1, \sin \gamma_1, L)$, $x_{\bar{s},i} = (x_i - x_{i-1})/h$, $x_{s,i} = (x_{i+1} - x_i)/h$, $x_{s,i}^* = (x_{i+1} - x_{i-1})/(2h)$, $x_{\bar{s},i}^* = (x_{s,i} - x_{\bar{s},i})/h$.

Для решения нелинейной разностной задачи (3) рассмотрим две двухслойные итерационные схемы:

$$(1/\tau)(x_{\bar{s},i}^{n+1} - x_{\bar{s},i}^n) + \Lambda_1(x^n, y^n, F^n)|_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_0^{n+1} = a_0, \quad x_{\bar{s},N}^{n+1} = \cos \gamma_1 + 0,5h F_N^n \sin \gamma_1, \quad (4)$$

$$(1/\tau)(y_{\bar{s},i}^{n+1} - y_{\bar{s},i}^n) + \Lambda_2(x^n, y^n, F^n)|_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_{s,0}^{n+1} = \sin \gamma_0 + 0,5h F_0^n \cos \gamma_0, \quad y_N^{n+1} = b_1, \quad (5)$$

$$(x_i^{n+1} - x_i^n)/\tau = x_{\bar{s},i}^{n+1} + y_{s,i}^n F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad x_0^{n+1} = a_0, \quad x_{\bar{s},N}^{n+1} = \cos \gamma_1 + 0,5h F_N^n \sin \gamma_1, \quad (6)$$

$$(y_i^{n+1} - y_i^n)/\tau = y_{\bar{s},i}^{n+1} - x_{s,i}^n F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad y_{s,0}^{n+1} = \sin \gamma_0 + 0,5h F_0^n \cos \gamma_0, \quad y_N^{n+1} = b_1, \quad (7)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации; $\tau > 0$ — параметр релаксации; $F_i^n = f_i^n + C^n$; $f_i^n = f(x_i^n, y_i^n, x_{s,i}^n, y_{s,i}^n, L^n)$.

Реализация первой схемы на каждой итерации сводится к решению прогоночных задач (4) и (5), а второй схемы — к решению прогоночных задач (6) и (7). В результате этого определяются новые итерационные приближения x^{n+1} и y^{n+1} , с помощью которых затем вычисляются f^{n+1} , C^{n+1} .

Схема (4), (5) успешно применялась для расчета равновесных форм односвязной [3, 6] и двухсвязной [4, 7 — 9] поверхностей как под действием гравитационных, центробежных и магнитных сил, так и в их отсутствие при невесомости. С ее помощью впервые численно решена задача капиллярной гидростатики с существенно несвязной свободной поверхностью — об осесимметричных равновесных формах статического магнитоожидкостного уплотнения под действием внешнего перепада давления [10]. Схема (6), (7) использовалась для исследования равновесных состояний капли, вращающейся в гравитационном поле [5].

2. Метод касательных. Введем в рассмотрение новое неизвестное $\beta(s)$ — угол между касательной к равновесной линии $x(s)$, $y(s)$ и осью Ox . В силу того что $x' = \cos \beta$, $y' = \sin \beta$, задачу (1), (2) можно переформулировать в виде

$$\beta' = F, \quad \beta(0) = \gamma_0, \quad \beta(1) = \gamma_1, \quad x' = \cos \beta, \quad x(0) = a_0, \quad y' = \sin \beta, \quad y(1) = b_1. \quad (8)$$

В такой постановке тождество $x'^2 + y'^2 \equiv 1$ удовлетворяется независимо от граничных условий. Предполагая, что условия $\beta(0) = \gamma_0$ и $\beta(1) = \gamma_1$ уже использовались для описания константы C , в задаче (8) достаточно оставить любое из них.

На неравномерной сетке $\{s_i = s_{i-1} + h_i \mid i = \overline{1, N}, s_0 = 0, s_N = 1\}$ для задачи (8) построим разностную схему четвертого порядка аппроксимации

$$(\beta_i - \beta_{i-1})/h_i = \Phi_i, \quad \Phi_i = 0,5(F_{i-1} + F_i) - (1/12)h_i(f'_i - f'_{i-1}),$$

$$(x_i - x_{i-1})/h_i = X(\beta, F)|_i, \quad X(\beta, F)|_i = 0,5(u_{i-1} + u_i) + (1/12)h_i(F_i v_i - F_{i-1} v_{i-1}),$$

$$(y_i - y_{i-1})/h_i = Y(\beta, F)|_i, \quad Y(\beta, F)|_i = 0,5(v_{i-1} + v_i) - (1/12)h_i(F_i u_i - F_{i-1} u_{i-1}),$$

$$i = \overline{1, N}, \quad \beta_0 = \gamma_0, \quad \beta_N = \gamma_1, \quad x_0 = a_0, \quad y_N = b_1, \quad (9)$$

где $F = f + C$, $f = f(x, y, u, v, L)$, $f' = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial f}{\partial y}v - \frac{\partial f}{\partial u}Fv + \frac{\partial f}{\partial v}Fu$; $u = \cos \beta$, $v = \sin \beta$.

Если в выражениях Φ_i , X_i , Y_i опустить слагаемые, содержащие h_i , то полученная схема будет аппроксимировать задачу (8) со вторым порядком.

С учетом (9) итерационный алгоритм для вычисления координат свободной поверхности построим в виде

$$\beta_i^{n+1} = \beta_{i+1}^{n+1} - h_{i+1}\Phi_{i+1}^n + (1 - \tau)(\beta_i^n - \beta_{i+1}^n + h_{i+1}\Phi_{i+1}^n), \quad (10)$$

$$i = N - 1, N - 2, \dots, 1, \quad \beta_N^{n+1} = \gamma_1, \quad \beta_0^{n+1} = \gamma_0,$$

$$x_i^{n+1} = x_{i-1}^{n+1} + h_i X(\beta^{n+1}, F^n), \quad i = \overline{1, N}, \quad x_0^{n+1} = a_0, \quad (11)$$

$$y_i^{n+1} = y_{i+1}^{n+1} - h_{i+1} Y(\beta^{n+1}, F^n)|_{i+1}, \quad i = N - 1, N - 2, \dots, 0, \quad y_N^{n+1} = b_1. \quad (12)$$

Вместо (10) можно воспользоваться процедурой

$$\beta_i^{n+1} = \beta_{i-1}^{n+1} + h_i \Phi_i^n + (1 - \tau)(\beta_i^n - \beta_{i-1}^n - h_i \Phi_i^n), \quad i = \overline{1, N - 1}, \quad \beta_0^{n+1} = \gamma_0, \quad \beta_N^{n+1} = \gamma_1. \quad (13)$$

Вычисления на каждой итерации осуществляются прямыми алгоритмами бегущего счета. Сначала по рекуррентным правилам (10) или (13) вычисляются сеточные значения β_i^{n+1} . Затем при помощи процедур (11) и (12) определяются новые итерационные приближения для координат свободной поверхности. И наконец, по найденным значениям x_i^{n+1} , y_i^{n+1} , β_i^{n+1} строятся сеточные функции F_i^{n+1} и Φ_i^{n+1} . Порядок обхода узлов в алгоритмах (11) и (12) отвечает конкретной постановке дифференциальной задачи о форме капиллярной поверхности. Для других постановок он может быть иным, не меняя существа метода.

Очевидными достоинствами метода касательных являются: высокий порядок аппроксимации на неравномерной сетке, точная аппроксимация граничных условий, простота конструкции и реализации алгоритма. В отличие от итерационно-разностных схем (4), (5) и (6), (7) метод обеспечивает выполнение разностного аналога условия $x'^2 + y'^2 = 1$ во всех узлах, на каждой итерации и при любых τ . Тем самым достигается лучшая согласованность итерационного решения с точным решением дифференциальной задачи.

Исследуем вычислительную устойчивость процедур (10) — (12) на итерациях. Предположим, что на $n + 1$ итерации в граничных условиях возникает вычислительная погрешность, так что фактически в алгоритмах (10) — (12) используются условия $\beta_N^{n+1} = \gamma_1 + \delta_N$, $x_0^{n+1} = a_0 + \xi_0$, $y_N^{n+1} = b_1 + \eta_N$. Под влиянием малых погрешностей δ_N , ξ_0 и η_N на $n + 1$ итерации получим решение $\beta_i^{n+1} = \beta_i^{n+1} + \delta_i$, $x_i^{n+1} = x_i^{n+1} + \xi_i$, $y_i^{n+1} = y_i^{n+1} + \eta_i$, $i = \overline{0, N}$. Принимая во внимание, что сеточные функции β^{n+1} , x^{n+1} , y^{n+1} также удовлетворяют уравнениям (10) — (12), с помощью простых тригонометрических преобразований приходим к следующим соотношениям для вычислительной погрешности в узлах сетки:

$$\delta_i = \delta_{i+1} = \delta_{i+2} = \dots = \delta_N, \quad i = \overline{1, N}, \quad (14)$$

$$\xi_i = \xi_0 - \sum_{k=1}^i \{h_k [\sin(\delta_{k-1}/2) \sin(\beta_{k-1}^{n+1} + \delta_{k-1}/2) + \sin(\delta_k/2) \sin(\beta_k^{n+1} + \delta_k/2)] +$$

$$+ (h_k^2/6) [F_{k-1}^n \sin(\delta_{k-1}/2) \cos(\beta_{k-1}^{n+1} + \delta_{k-1}/2) - F_k^n \sin(\delta_k/2) \cos(\beta_k^{n+1} + \delta_k/2)]\}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (15)$$

$$\eta_i = \eta_N - \sum_{k=i+1}^N \{h_k [\sin(\delta_{k-1}/2) \cos(\beta_{k-1}^{n+1} + \delta_{k-1}/2) + \sin(\delta_k/2) \cos(\beta_k^{n+1} + \delta_k/2)] +$$

$$+ (h_k^2/6) [F_{k-1}^n \sin(\delta_{k-1}/2) \sin(\beta_{k-1}^{n+1} + \delta_{k-1}/2) - F_k^n \sin(\delta_k/2) \sin(\beta_k^{n+1} + \delta_k/2)]\}, \quad i = \overline{0, N - 1}. \quad (16)$$

Равенства (14) свидетельствуют об абсолютной устойчивости процедуры (10), а из соотношений (15), (16) с учетом (14) легко построить следующие грубые оценки: $|\xi_i| \leq |\xi_0| + |\delta_N|(1 + \max_{1 \leq k \leq N} (|F_k^n| h_k)/6)$, $|\eta_i| \leq |\eta_N| + |\delta_N|(1 + \max_{1 \leq k \leq N} (|F_k^n| h_k)/6)$, $i = \overline{0, N}$, которые озна-

чают, что процедуры (11) и (12) также устойчивы. Следовательно, алгоритм реализации метода касательных на каждой итерации абсолютно устойчив.

Сходимость итерационного процесса (10) — (12) при $n \rightarrow \infty$ удается исследовать в предположении, что функция F не зависит от решения, т.е. $\Phi_i^n = \Phi_i$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае итерации осуществляются только по алгоритму (10). Пусть β — искомое разностное решение. Примем обозначение для итерационной погрешности $\varepsilon_i^n = \beta_i^n - \beta_i$, $i = \overline{0, N}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где ε^0 — начальное итерационное приближение. Полагая $\varepsilon_0^n = \varepsilon_N^n = 0$ и подставляя в (10) $\beta^n = \beta + \varepsilon^n$, получим для погрешности задачу $\varepsilon_i^{n+1} - (1-\tau)\varepsilon_i^n = \varepsilon_{i+1}^{n+1} - (1-\tau)\varepsilon_{i+1}^n$, $i = N-1, N-2, \dots, 1$, $\varepsilon_N^{n+1} = 0$, которая распадается на систему равенств $\varepsilon_i^{n+1} - (1-\tau)\varepsilon_i^n = 0$, $i = \overline{1, N-1}$. Следовательно, итерационная погрешность на n итерации связана с погрешностью начального приближения соотношениями $\varepsilon_i^n = (1-\tau)\varepsilon_i^{n-1} = (1-\tau)^2\varepsilon_i^{n-2} = \dots = (1-\tau)^n\varepsilon_i^0$, $i = \overline{0, N}$. Отсюда вытекает, что условие $0 < \tau < \tau^* = 2$ является необходимым и достаточным для сходимости итераций при $n \rightarrow \infty$. Это условие получено в линейном приближении. Практика показывает, что с ростом нелинейности область сходимости $(0, \tau^*)$ постепенно сужается в направлении нуля ($\tau^* \rightarrow 0$).

3. Тестовые задачи. Замена переменных. Рассмотрим свободную поверхность неподвижной магнитной жидкости, находящуюся в потенциальном поле массовых сил $\mathbf{F}$ — гравитационных и магнитных. Равновесная форма поверхности определяется балансом нормальных напряжений и капиллярных сил и может быть найдена из уравнения гидростатики [11, с. 74; 12, с. 134] $\nabla p = \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = \mu_0 M \nabla H + \rho \mathbf{g}$, и условия для скачка давления на свободной поверхности [11, с. 80; 12, с. 142] $p - p_0 = \sigma K - 0,5\mu_0(M H_n/H)^2$, где p и $p_0 = \text{const}$ — давление внутри и вне жидкости, μ_0 — магнитная постоянная, $M = M(H)$ — намагниченность жидкости, H и H_n — величина и нормальная составляющая вектора напряженности магнитного поля, ρ — плотность жидкости, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, σ — коэффициент поверхностного натяжения, K — сумма главных кривизин поверхности, принимающая положительное значение, если поверхность выпукла. Отсюда получаем уравнение равновесия свободной поверхности магнитной жидкости

$$K = \Psi + \text{const}, \quad \Psi = \Pi/\sigma + \mu_0(M H_n/H)^2/(2\sigma), \quad (17)$$

где Π — потенциал поля массовых сил, связанный с ними соотношением $\mathbf{F} = \nabla \Pi$.

Для тестовых испытаний алгоритмов выбирались две задачи об осесимметричных равновесных формах односвязной капиллярной поверхности: 1) задача о капле, висющей на горизонтальной плоскости в поле силы тяжести; 2) задача об изолированной капле магнитной жидкости в сильном однородном магнитном поле. Первая из них — классическая задача капиллярной гидростатики [1, с. 155; 2, с. 149; 13, с. 83], вторая — известная задача статики магнитной жидкости [3; 6; 11, с. 84; 14, с. 176].

В обеих задачах свободная поверхность является поверхностью вращения, форма которой определяется равновесной линией меридиана. Введем цилиндрические координаты R, Z , совместив ось OZ с осью симметрии, и пусть S — длина дуги искомой равновесной линии, изменяющаяся от $S = 0$ до $S = l$. Форму равновесной линии будем описывать параметрическими функциями $R(S), Z(S)$. В таком случае кривизна вычисляется по формуле [1, с. 43] $K = \pm(RZ')'/(RR')$, где знак выбирается в зависимости от направления возрастания длины дуги S , чтобы обеспечить положительность кривизны K на выпуклых участках поверхности. Следовательно, уравнение (17) примет вид $Z'' = R'F$, $F = \pm\Psi + \text{const} - Z'/R$, $0 \leq S \leq l$. Еще одним уравнением служит естественное условие $R'^2 + Z'^2 = 1$, которое, используя операцию дифференцирования, можно заменить на $R'' = -Z'F$. Чтобы естественное условие при этом не нарушалось, его следует удовлетворить, хотя бы при одном значении S , например при $S = 0$ или $S = l$.

Задача 1. Направим ось симметрии OZ противоположно вектору силы тяжести и поместим начало координат на плоскость — в середину основания капли. Пусть длина дуги принимает значение $S = 0$ в вершине капли и $S = l$ в точке контакта меридиана с плоскостью $Z = 0$. Такому направлению возрастания S соответствует знак (+) в выражении

для кривизны K . В силу отсутствия иных, кроме силы тяжести, внешних сил имеем $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$, $\Pi = -\rho g Z$. Поэтому в уравнениях свободной поверхности следует положить $\Psi = -(\rho g / \sigma) Z$.

Краевые условия образуются из условий симметрии при $S = 0$ и условий контакта с твердой стенкой при $S = l$: $R(0) = 0$, $R'(0) = 1$, $Z'(0) = 0$; $Z(l) = 0$, $R'(l) = \cos \alpha$, $Z'(l) = \sin \alpha$, где α — угол смачивания. Считая объем капли V заданным, определим его как объем тела вращения: $V = -2\pi \int_0^l Z R R' dS$.

Задача 2. Рассмотрим каплю магнитной жидкости, не имеющую контакта с твердой стенкой и находящуюся в сильном однородном магнитном поле при невесомости в состоянии магнитного насыщения. Предположим, что вектор напряженности поля коллинеарен оси симметрии OZ . Тогда $\mathbf{F} = \mu_0 \hat{M} \nabla H = 0$, $H_n = \pm H R'$, и в уравнениях свободной поверхности следует, очевидно, положить $\Psi = \mu_0 \hat{M}^2 (R')^2 / (2\sigma)$, где $\hat{M}$ — намагниченность насыщения жидкости. Считая каплю симметричной относительно экваториальной плоскости $Z = 0$, ограничимся полупространством $Z \geq 0$. Как и в первой задаче, выберем точку $S = 0$ на оси OZ , а точку $S = l$ — на плоскости $Z = 0$. Этому выбору соответствует знак $(-)$.

Краевые условия формируются с учетом симметрии капли: $R(0) = 0$, $R'(0) = 1$, $Z'(0) = 0$; $Z(l) = 0$, $R'(l) = 0$, $Z'(l) = -1$. Математическая модель замыкается соотношением $V = 4\pi \int_0^l Z R R' dS$, связывающим решение с объемом капли:

Замена переменных. Особенность параметрической постановки в том, что длина l равновесной линии, т.е. область определения задачи, заранее неизвестна. Это создает большие трудности для численного решения. Важным звеном в построении алгоритмов итерационно-разностного метода является процедура обезразмеривания типа преобразования Ландау [15, с. 59], позволяющая вынести неизвестную длину в уравнения и проводить вычисления на фиксированном промежутке $[0, 1]$.

Выберем l в качестве характерного размера и введем безразмерные переменные

$$s = S/l, \quad r = R/l, \quad z = Z/l. \quad (18)$$

Первая тестовая задача в новых переменных примет вид

$$r'' = -z'(f + C), \quad z'' = r'(f + C), \quad f = -\text{Bo} L^2 z - z'/r, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (19)$$

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad r'(1) = \cos \alpha, \quad z'(1) = \sin \alpha, \quad (20)$$

$$L = \left(-2\pi \int_0^1 z r r' ds \right)^{-1/3}, \quad (21)$$

где $\text{Bo} = \rho g V^{2/3} / \sigma$ — число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к капиллярным; $L = l/V^{1/3}$; C — неопределенная пока константа. Чтобы определить константу C , запишем одно из уравнений (19) в виде $(rz')' = rr'(-\text{Bo} L^2 z + C)$. Проинтегрировав его затем на отрезке $[0, 1]$ с учетом условий (20) и (21), находим

$$C = 2 \sin \alpha / r(1) - \text{Bo} / (\pi L r^2(1)). \quad (22)$$

Сформулируем в переменных (18) вторую тестовую задачу

$$r'' = -z'(f + C), \quad z'' = r'(f + C), \quad f = -W L^2 r'^2 - z'/r, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (23)$$

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad r'(1) = 0, \quad z'(1) = -1, \quad (24)$$

$$L = \left(-2\pi \int_0^1 z' r^2 ds \right)^{-1/3}, \quad (25)$$

где $W = \mu_0 M^2 V^{1/3} / (2\sigma)$ — безразмерный параметр, имеющий смысл отношения магнитного скачка давления на свободной поверхности к капиллярному скачку давления; $L = l/V^{1/3}$. Зависимость константы C от решения устанавливается так же, как в первой задаче:

$$C = \frac{2}{r^2(1)} \left(-r(1) + WL \int_0^1 r r'^3 ds \right). \quad (26)$$

Отметим, что основная цель применения нами преобразования переменных (18) заключается в том, чтобы получить явную устойчивую формулу для корректировки безразмерной длины L в процессе итерационного решения нелинейной задачи о равновесии свободной поверхности. Это достигается с помощью интегрального условия, которое в первой и второй тестовых задачах преобразуется соответственно к виду (21) и (25), удобному для пересчета длины L на каждой итерации алгоритма последовательного уточнения неизвестной границы.

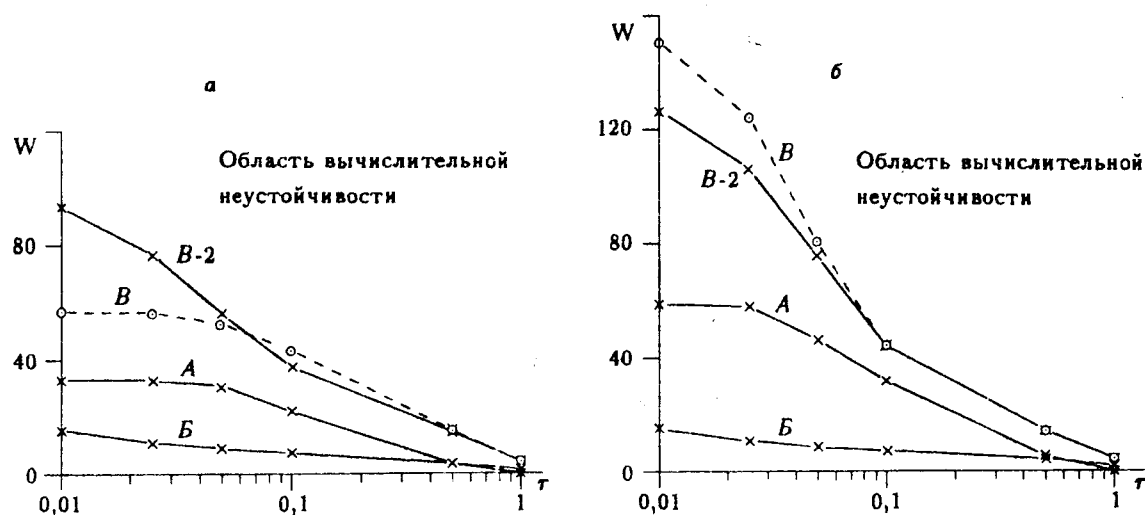
4. Результаты тестовых испытаний. В дальнейшем схемы (4), (5) и (6), (7) будем для краткости называть схемой A и схемой B соответственно, а алгоритм (10) — (12) — схемой B . Тестовые испытания этих схем проводили на задачах (19) — (22) и (23) — (26). Опробовали также вариант схемы B второго порядка точности (схема $B-2$). Интегралы в L и C аппроксимировали с тем же порядком, что и дифференциальные уравнения: в схемах A , B использовался аналог квадратурной формулы средних, в схеме B — формула Эйлера. Расчеты осуществлялись на равномерных сетках с шагами $h = 1/100$ и $1/20$, а также на адаптивной сетке [6] с числом разбиений $N = 100$.

Как показали расчеты, за счет упрощения и сокращения числа процедур бегущего счета при переходе от одной итерации к другой схема B расходует на одну итерацию в 1,5 — 2 раза меньше машинного времени, чем схемы A , B . Что касается скорости сходимости, то здесь преимущество схемы B не столь существенно.

Известно, что существование равновесных состояний в задаче 1 ограничено небольшими значениями числа Бонда $Bo < Bo_{кр}(\alpha)$, а при $Bo = Bo_{кр}$ наступает кризис равновесия — капля отрывается от плоскости. Выбор задачи 1 в качестве тестовой объясняется желанием сравнить критические значения $Bo_{кр}$, полученные по признаку вычислительной неустойчивости итерационных схем, с известными данными теории устойчивости равновесных капиллярных поверхностей. Считали, что значение числа Бонда превышает критическое, если при этом значении итерации расходились. Критические значения $Bo_{кр}$ уточняли по методу дихотомии, пока их погрешность не становилась менее $\delta = 0,0005$. Сравнение с теоретическими результатами показало, что кризис вычислительного процесса происходит при тех же $Bo_{кр}$, что и разрушение равновесных форм. Так, при $\alpha = 45^\circ$ теоретически предсказано значение $Bo_{кр} = 4,988$, а численно нами при шаге $h = 1/100$ с помощью схемы A получено $Bo_{кр} = 4,982$; в случае $\alpha = 90^\circ$ эти значения оказались соответственно 2,265 и 2,265, а при $\alpha = 135^\circ$ — 0,579 и 0,580 [3]. Приведенные здесь данные теории устойчивости строили интерполяцией по табл. 9 из [1, с. 146; 2, с. 140]. Чтобы избежать влияния погрешности интерполяции, более подробно рассматривался угол $\alpha = 1,523$, для которого в этой таблице указано точное значение $Bo_{кр} = 2,407$. В результате численного эксперимента при $h = 1/20$ получены критические значения $Bo_{кр} = 2,3970 \pm \delta$ (схемы A , B), 2,4185 (схема $B-2$), $2,4058 \pm \delta$ (схема B), а при $h = 1/100$ все схемы показали одинаковый результат $Bo_{кр} = 2,4058 \pm \delta$. Столь же точное совпадение теоретических и численных значений критических параметров наблюдалось на других задачах [5, 9, 10]. Таким образом, все представленные итерационные схемы адекватно реагируют на кризис равновесного состояния, обусловленный плоскими или осесимметричными возмущениями.

Для задачи 2 механизм физического разрушения равновесных форм не выявлен [11, с. 84; 14, с. 176]: с ростом параметра W капля магнитной жидкости вытягивается вдоль направления поля, не разрываясь. Кривизна поверхности в вершинах капли $K(0)$ при этом увеличивается, а вблизи экваториальной линии уменьшается. Задача 2 является хорошим тестом для испытания итерационных схем на “прочность”, так как возникновение неустойчивости при их реализации может быть только вычислительного характера. На рисунке показаны

границы вычислительной устойчивости итерационных схем при $h = 1/20$ (а) и $h = 1/100$ (б). Заметим, что устойчивость всех схем, за исключением схемы В, заметно улучшается с уменьшением шага h . Как на одной, так и на другой равномерных сетках схемы метода касательных устойчивы в значительно более широкой области параметров, чем схемы А, В. На адаптивной сетке схема В оказалась еще более эффективной, обеспечив решение задачи 2 вплоть до $W = 4800$, при котором кривизна $K(0)$ в 1491 раз превысила свое первоначальное значение при $W = 0$. Ранее в работе [6], где итерации были организованы по схеме А, решение удавалось получить лишь при $W = 750$.



Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости / Под ред. А. Д. Мышкиса. М., 1976.
2. Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Жуков М. Ю. и др. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / Под ред. А. Д. Мышкиса. Киев, 1992.
3. Берковский Б. М., Полевиков В. К. // Магнитная гидродинамика. 1983. № 4. С. 60 — 66.
4. Баштовой В. Г., Будник А. М., Полевиков В. К., Рекс А. Г. // Магнитная гидродинамика. 1984. № 2. С. 47 — 53.
5. Полевиков В. К., Денисенко В. М. // Вестн. Бел. ун-та. Сер.1. Физика, математика, механика. 1985. № 2. С. 37 — 41.
6. Полевиков В. К. // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 12. С. 2146 — 2152.
7. Будник А. М., Полевиков В. К. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 6. С. 154 — 156.
8. Вислович А. Н., Полевиков В. К. // Магнитная гидродинамика. 1994. № 1. С. 77 — 86.
9. Вислович А. Н., Полевиков В. К. // Инженерно-физический журнал. 1997. Т. 70, № 1. С. 105 — 110.
10. Полевиков В. К. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 3. С. 170 — 175.
11. Берковский Б. М., Медведев В. Ф., Краков М. С. Магнитные жидкости. М., 1989.
12. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М., 1989.
13. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М., 1989.
14. Блум Э. Я., Майоров М. М., Цеберс А. О. Магнитные жидкости. Рига, 1989.
15. Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М., 1987.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
10 ноября 1997 г.