

УДК 532.5.013.12:537.84:536.252:519.63

В. К. Полевиков

ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА, ПОКРЫТОГО МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ ТЕРМОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ

Случай изотермического обтекания цилиндрического проводника, покрытого равномерным слоем магнитной жидкости, ранее рассматривался аналитически при числах Рейнольдса $Re \ll 1$ [1] и численно при $0,1 \leq Re \leq 100$ [2]. В работе [2] показано, что маловязкое магнитожидкостное покрытие может служить эффективным стабилизатором отрывного потока, обеспечивающим значительное уменьшение гидродинамического сопротивления цилиндра. В [3] аналогичная задача решена для шара. Безусловно, более естественной является ситуация, когда температура проводника с током отличается от температуры набегающего потока. При этом может возникать термомагнитная конвекция, обусловленная зависимостью намагниченности жидкости от температуры в неоднородном магнитном поле проводника [4]. Изучению роли термомагнитной конвекции в процессе отрывного обтекания цилиндрического проводника с магнитожидкостным покрытием и посвящена настоящая работа. Исследование проведено с помощью численного эксперимента.

Представим, что бесконечный поток вязкой немагнитной жидкости, имеющей постоянную температуру T_∞ , движется в условиях невесомости с постоянной скоростью u . Установим поперек потока длинный твердый цилиндрический проводник радиусом R , который поддерживается при постоянной температуре $T_c > T_\infty$ и покрыт слоем магнитной жидкости. Будем считать, что жидкость покрытия не смешивается с жидкостью потока, причем сила текущего по проводнику тока I достаточно велика, чтобы в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса линия раздела Γ магнитной и немагнитной жидкостей оставалась окружностью радиусом $a > R$ [2]. Радиус цилиндра R , скорость невозмущенного потока u и перепад температур $\Delta T = T_c - T_\infty$ примем в качестве единиц измерения расстояния, скорости и температуры и введем полярные координаты r, φ с полюсом на оси цилиндра. Тогда $r \geq a/R$ будет отвечать области внешнего течения, а $1 \leq r \leq a/R$ — слою магнитной жидкости. Функции и коэффициенты, относящиеся к магнитной жидкости, будем при необходимости обозначать нижним индексом 1, а относящиеся к внешнему течению — нижним индексом 2. Чтобы упростить математическую модель, применим известное безындукционное приближение, позволяющее пренебречь влиянием неизотермичности магнитной жидкости на характеристики магнитного поля проводника. При этом отпадает необходимость решать уравнения Максвелла, так как их решение для магнитного поля прямолинейного цилиндрического проводника известно. Возможность применения безындукционного приближения к задачам термомагнитной конвекции обоснована в [5, 6].

При сделанных предположениях и в отсутствие силы тяжести система безразмерных уравнений, описывающих двумерную стационарную термомагнитную конвекцию в слое магнитной жидкости, выглядит следующим образом (см. [2, 4]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(\varphi, r)} &= \frac{k_1/k_2}{Re Pr (c_1/c_2) (\rho_1/\rho_2)} \nabla^2 T; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(\varphi, r)} = \\ &= \frac{\eta_1/\eta_2}{Re \rho_1/\rho_2} \nabla^2 \omega - \left(\frac{\eta_1/\eta_2}{Re \rho_1/\rho_2} \right)^2 Gr_m \frac{1}{r^3} \frac{\partial T}{\partial \varphi}; \quad \nabla^2 \psi + \omega = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T, ω, ψ — безразмерные температура, завихренность и функция тока; $\partial(f, g)/\partial(\varphi, r)$ — якобиан; ∇^2 — оператор Лапласа в полярных координатах; k, c, ρ, η — коэффициенты теплопроводности, удельной теплоемкости, плотности и динамической вязкости; $Re = uR\rho_2/\eta_2$ и $Pr = \eta_2 c_2/k_2$ — числа Рейнольдса и Прандтля, определенные по теплофизическим параметрам внешнего потока; $Gr_m = \mu_0 K_1 \rho_1 R / \Delta T / (2\pi\eta_1^2)$ — магнитное число Грасгофа; μ_0 — магнитная постоянная; K — пироманитный коэффициент.

В немагнитной жидкости механизм возбуждения конвекции отсутствует, поэтому соответствующие уравнения распространения тепла, завихренности и функции тока примут вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, T)}{\partial(\varphi, r)} = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 T; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(\varphi, r)} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega; \quad \nabla^2 \psi + \omega = 0. \quad (2)$$

Составляющие скорости вычисляются через функцию тока: $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$;

$v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$. На твердой поверхности справедливы условия прилипания для скорости, а температура имеет максимальное значение:

$$\psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0; \quad T = 1 \quad (r = 1). \quad (3)$$

На линии раздела Γ зададим условия непрерывности скорости и температуры, непроницаемости поверхности, баланса касательных напряжений и тепловых потоков:

$$\begin{aligned} \psi = 0; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r}; \quad T_1 = T_2; \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} \left(\omega_1 + \frac{2}{a/R} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) = \\ = \omega_2 + \frac{2}{a/R} \frac{\partial \psi_2}{\partial r}; \quad \frac{k_1}{k_2} \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{\partial T_2}{\partial r} \quad (r = a/R). \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать решение симметричным, поэтому на полуосях $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ положим

$$\psi = 0; \quad \omega = 0; \quad \partial T / \partial \varphi = 0 \quad (\varphi = 0; \pi). \quad (5)$$

Реализация численного метода требует, чтобы область определения задачи была конечной. Поэтому на достаточно большом расстоянии $r = r_\infty \gg a/R$ пренебрежем возмущениями температуры и скорости в потоке, вызванными обтеканием цилиндра, и примем

$$\psi = r_\infty \sin \varphi; \quad \omega = 0; \quad T = 0 \quad (r = r_\infty). \quad (6)$$

Уравнения (1), (2) вместе с граничными условиями (3)...(6) составляют математическую модель исследуемого процесса. Уравнения (1) определены на внутреннем полукольце ($1 \leq r \leq a/R$; $0 \leq \varphi \leq \pi$), а (2) — на внешнем ($a/R \leq r \leq r_\infty$; $0 \leq \varphi \leq \pi$). Параметрами, определяющими решение задачи, служат Re, Pr, Gr_m и отношения $a/R, k_1/k_2, c_1/c_2, \rho_1/\rho_2, \eta_1/\eta_2$. Безразмерная сила сопротивления цилиндра с покрытием вычисляется по формуле [2]

$$W = \left(\frac{a}{R} \right) Re \int_0^\pi \left[Re v_\varphi^2 \cos \varphi + 2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega_2}{r} \right) \sin \varphi \right]_{r=a/R} d\varphi.$$

Интенсивность теплоотдачи цилиндра характеризуется средним числом Нуссельта

$$Nu = - \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1} d\varphi = - \frac{a}{R} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=a/R} d\varphi.$$

Задача (1) ... (6) решалась методом сеток. Построение сетки в слое покрытия и в области внешнего полукольца осуществлялось так же, как в [2]. Безразмерный радиус «бесконечности» r_∞ выбирали равным 20 радиусам проводника, т. е. полагали $r_\infty = 20$. По полярному углу шаг сетки задавали равным $\pi/40$, по радиусу в слое покрытия строили равномерную сетку с числом разбиений 10, а в области $a/R \leq r \leq r_\infty$ — неравномерную с шагом, растущим по закону геометрической прогрессии и числом разбиений 20, причем первый шаг неравномерной сетки приравняли радиальному шагу внутренней равномерной сетки. Заметим, что при выбранном $a/R = 1,1$ такая конструкция обеспечивает вблизи твердой поверхности значительно большее сгущение узлов, чем обычно применяется при численном моделировании обтекания цилиндра [7...9].

Уравнения (1), (2) аппроксимировали монотонной консервативной разностной схемой, имеющей на регулярном шаблоне второй порядок аппроксимации, а на нерегулярном — первый. Для равномерной сетки эта схема приведена в [4]. Схема обладает хорошей устойчивостью и отражает в сеточной области физические законы сохранения. Завихренность на твердой стенке задавали приближенным условием Вудса. Производные в граничных условиях аппроксимировали со вторым порядком на минимальном шаблоне с учетом вида дифференциальных уравнений на границе. Решение полученной разностной задачи находилось с помощью итерационно-релаксационного метода [10].

Специфика задачи такова, что точность ее разностного решения зависит не только от конструкции сетки, но и от радиуса «бесконечности» r_∞ и граничного условия при $r = r_\infty$. Основанием для их выбора послужили методические выводы работы [7], в которой решалась задача обтекания цилиндра без покрытия при $Re = 50$, $r_\infty \approx 20$ и 90 с тремя употребительными типами условий на «бесконечности» [11]: «жесткими» (6), «мягкими» и асимптотическими. При этом различие в картинах течения было обнаружено только вблизи внешней границы $r = r_\infty$. Показано также, что тип условия на этой границе слабо влияет и на интегральные характеристики решения.

О степени достоверности вычислительной модели дают представление результаты расчетов, выполненных в [2] для цилиндра без покрытия. Их сравнение с известными данными [7...9], соответствующими $r_\infty \rightarrow \infty$, не обнаруживает расхождения ни в значениях критического числа Рейнольдса и отрывного угла, ни в структурах течения вблизи цилиндра. Что касается интеграла силы сопротивления, то в диапазоне $0 \leq Re \leq 100$ его расчетные значения оказались выше экспериментальных [12], но отклонение составило не более 10%.

Расчеты выполняли при постоянных $a/R = 1,1$; $\rho_1/\rho_2 = 1$; $k_1/k_2 = 1$; $c_1/c_2 = 1$ и трех значениях относительной вязкости $\mu = \eta_1/\eta_2 = 10^{-2}$; 1; 10. Значения чисел Рейнольдса и Прандтля варьировали в диапазонах $10 \leq Re \leq 100$; $1 \leq Pr \leq 10^3$. В качестве параметра термомагнитной конвекции рассматривалось магнитное число Рэлея $Ram = Grm Pr \mu c_1/c_2 k_2/k_1$, которое изменялось в пределах $0 \leq Ram \leq 10^7$.

Рис. 1 показывает, насколько значительным может быть воздействие термомагнитной конвекции на структуру обтекающего потока и движение магнитной жидкости. При $Ram = 0$, т. е. в отсутствие механизма конвекции, за цилиндром с покрытием образуется небольшой отрывной вихрь. (Существование и размеры его зависят от Re и μ , но угол отрыва не превышает 70° [2].) Такой картине внешнего течения отвечают в полуслое покрытия две ячейки серповидной формы, причем доминирует та из них, которая расположена в передней части покрытия и порождена основным течением обтекающей жидкости. Конвекция не оказывала сколько-нибудь заметного влияния на структуру вплоть до $Ram = 10^5 - 5 \cdot 10^5$, однако дальнейшее увеличение Ram привело к стремительному разбуханию зоны отрывного вихря, так что в рассматриваемом случае уже при $Ram \sim 2 \cdot 10^6$ угол отрыва достиг максимального

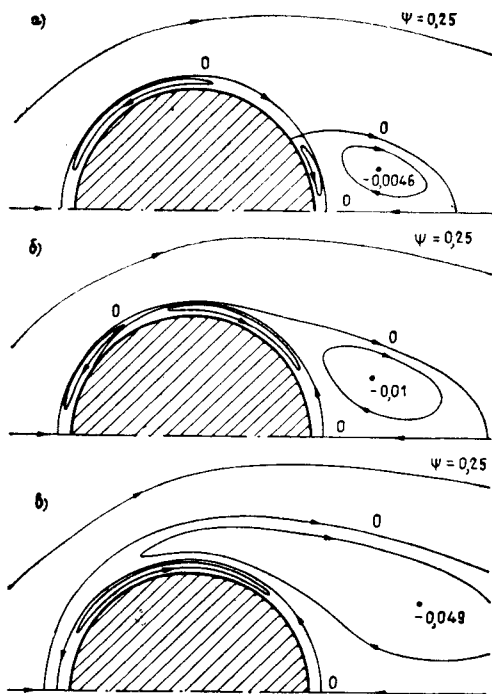


Рис. 1. Структура отрывного течения при $Re=10$; $Pr=1$; $\mu=1$; $Ram=0$ (а); 10^6 (б); 10^7 (в). Линии тока, около которых не указаны числа, соответствуют половине значения ψ в центре вихрей.

значения π . Из рис. 1 видно, что при $Ram=10^7$ зона отрывного вихря сомкнулась вокруг слоя магнитной жидкости, образовав между потоком и покрытием буферную оболочку с безрасходным движением. Это привело к полному затуханию той ячейки, которая при $Ram=0$ была доминирующей в полуслое покрытия, а ячейка, граничащая с отрывным вихрем, распространилась на всю область полуслоя.

Изменение гидродинамической обстановки на линии раздела можно количественно

оценить с помощью данных рис. 2. Анализ профилей скорости показывает, что в рассмотренном случае ($Re=10$; $Pr=1$; $\mu=1$) механизм термомангнитной конвекции порождает такое движение, которое согласуется с циркуляцией отрывного вихря, но противодействует основному течению внешнего потока. С ростом Ram произошла полная переориентация течения на Γ по направлению, противоположному обтеканию. Наряду с инверсией вектора скорости наблюдается существенная интенсификация движения. Так, при $Ram=10^7$ максимальное значение скорости на Γ почти в пять раз выше, чем при $Ram=0$. При больших значениях Ram максимум скорости достигается вблизи средней точки $\varphi=\pi/2$. В случае $Pr=1$; $\mu=1$ буферная оболочка вокруг магнитожидкостного покрытия была обнаружена при всех $Ram \geq 3 \cdot 10^5$ Re . Выяснилось, что ее образованию способствуют уменьшение Pr и увеличение μ , а препятствуют рост Pr и уменьшение μ . При $\mu=0,01$ расчеты не показали ощутимого влияния параметра Ram на решение задачи, в

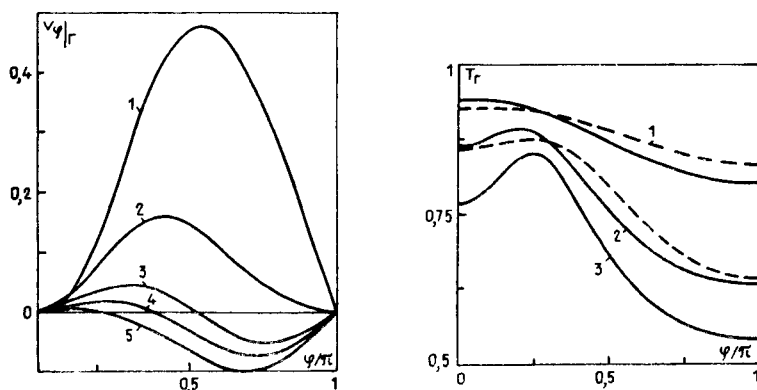


Рис. 2. Профили скорости на линии раздела при тех же Re , Pr и μ , что на рис. 1, и $Ram=10^7$ (1); $3 \cdot 10^6$ (2); 10^6 (3); $5 \cdot 10^5$ (4); 0 (5).

Рис. 3. Распределение температуры на линии раздела при $Pr=1$; $\mu=1$ и $Re=10$ (1); 50 (2); 100 (3); $Ram=5 \cdot 10^5$ (—) и 10^7 (---).

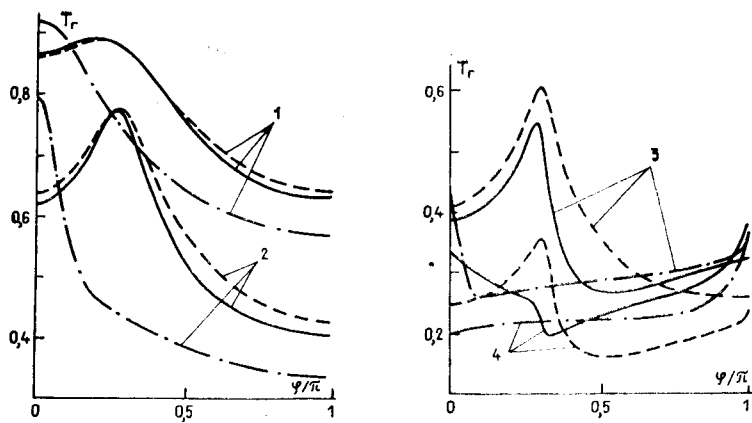


Рис. 4. Распределение температуры на линии раздела при $Re=50$; $Ram=5 \cdot 10^5$ и $Pr=1$ (1); 10 (2); 10^2 (3); 10^3 (4); $\mu=10$ (---); 1 (—) и 0,01 (---).

частности, ни при каких значениях Re , Pr и Ram возникновения отрывного вихря не отмечалось.

Изменения, происходящие в структуре течения с ростом Ram , можно объяснить, исходя из распределения температуры на линии раздела (рис. 3, 4). Как видим, в рассмотренных диапазонах параметров оно крайне неоднородно. Если бы не влияние внешнего потока, в магнитной жидкости при любых $Ram \neq 0$ возникало бы конвективное движение, обусловленное неизотермичностью границы Γ , причем на участках возрастания функции $T_r(\varphi)$ магнитная жидкость циркулировала бы по часовой стрелке, а на участках убывания — против нее. Структура течения около цилиндра формируется в результате вязкого взаимодействия этих циркуляций с внешним потоком на линии раздела. Преобладание того или иного механизма определяется соотношением между Re и Ram , зависящим от остальных параметров.

Расчеты не выявили существенного влияния термомагнитной конвекции на силу гидродинамического сопротивления W . Даже при разбухании отрывного вихря значение W возрастало не более чем на 12% по сравнению с изотермическим случаем [2].

При $Ram \leq 5 \cdot 10^5$ роль термомагнитной конвекции в распределении температуры оказалась незначительной. Рис. 3 свидетельствует, что она

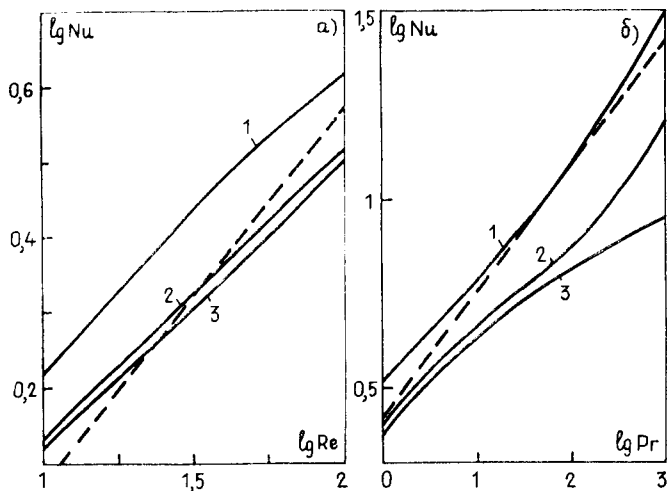


Рис. 5. Зависимости $\lg Nu$ от $\lg Re$ (а) при $Pr=1$ и от $\lg Pr$ (б) при $Re=50$; $\mu=0,01$ (1), 1 (2); 10 (3). $Ram=5 \cdot 10^5$. (---) — теплоотдача цилиндра без покрытия по критериальной формуле работы [13], приведенной в тексте.

невелика и при более высоких Ra_m , по крайней мере по сравнению с влиянием параметров Re , Pr и μ . На рис. 3 и 4 показана трансформация температурного профиля на Γ при изменении этих параметров, носящая весьма сложный характер. Не только рост Re и Pr , но, как правило, и уменьшение μ приводят к заметному охлаждению жидкости, способствуя улучшению теплоотдачи цилиндра. Для сравнения отметим, что в режиме теплопроводности ($Re \rightarrow 0$; $Ra_m \rightarrow 0$) граница Γ имеет температуру $T_\Gamma = 0,968$. В условиях общего снижения температуры происходит ее перераспределение вдоль линии раздела, характеризующееся усиливающейся неоднородностью. Проявляется тенденция к смещению точки максимума функции $T_\Gamma(\varphi)$ по направлению отсчета угла φ . С ростом Pr температура на задней кромке покрытия падает стремительнее, чем на передней, так что при $Pr = 10^3$ достигается $T_\Gamma(0) < T_\Gamma(\pi)$.

Рис. 5 иллюстрирует влияние Re , Pr и μ на интенсивность теплоотдачи цилиндра. Сразу отметим, что значения Nu , найденные при $Ra_m = 5 \cdot 10^5$ и представленные на графиках, отличаются от полученных при $Ra_m = 0$ и $Ra_m = 10^7$ не более чем на 1 и 10%. Теплоотдача цилиндра без покрытия описывается формулой [13] $Nu = 0,662 Pr^{1/3} (Re/\pi)^{1/2}$.

Основываясь на приведенных результатах и данных [2], можно утверждать, что применение маловязких покрытий не только снижает гидродинамическое сопротивление, но и увеличивает теплоотдачу цилиндра. Особенно заметен эффект усиления теплоотдачи при уменьшении значений числа Рейнольдса. Видимо, невозможность переноса вещества через поверхность Γ является при высоких Re более серьезной помехой теплоотводу, чем при низких.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краков М. С. Управление отрывом потока с помощью намагничивающейся жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов. — 1984. — № 3. — С. 10—14.
2. Полевилов В. К. Численное исследование гидродинамического сопротивления кругового цилиндра, покрытого тонким слоем магнитной жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов. — 1986. — № 3. — С. 11—16.
3. Polevnikov V. K. The influence of magnetofluid coating on hydrodynamical drag of solids // 4th Intern. Conf. Magnetic Fluids: Abstracts. — Tokyo, 1986. — P. 37—38.
4. Полевилов В. К., Фертман В. Е. Исследование теплообмена через горизонтальный кольцевой слой магнитной жидкости при охлаждении цилиндрических проводников с током // Магнит. гидродинамика. — 1977. — № 1. — С. 15—21.
5. Фертман В. Е. Магнитные жидкости — естественная конвекция и теплообмен. — Минск, 1978. — 208 с.
6. Баштовой В. Г., Берковский Б. М., Вислович А. Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. — М., 1985. — 188 с.
7. Гуцин В. А. Численное исследование обтекания тела конечного размера потоком несжимаемой вязкой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1980. — Т. 20, № 5. — С. 1333—1341.
8. Dennis S. C. R., Chang G.-Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // J. Fluid Mech. — 1970. — Vol. 42, N 3. — P. 471—489.
9. Hamielec A. E., Raal J. D. Numerical studies of viscous flow around circular cylinders // Phys. Fluids. — 1969. — Vol. 12, N 1. — P. 11—17.
10. Полевилов В. К. Применение метода релаксации для решения стационарных разностных задач конвекции // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1981. — Т. 21, № 1. — С. 127—138.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М., 1987. — 840 с.
12. Tritton D. J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // J. Fluid Mech. — 1959. — Vol. 6, N 4. — P. 547—567.
13. Лыков А. В. Теплообмен: Справочник. — М., 1978. — 480 с.

Поступила в редакцию 14.01.88 (11.09.87)