

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1987



Георгий Иванович ПЕТРОВ

1912—1987 гг.

Редколлегия с глубокой скорбью извещает читателей журнала о том, что 13 мая 1987 г. скончался выдающийся советский ученый-механик, бессменный главный редактор нашего журнала, академик Георгий Иванович Петров.

Научная, педагогическая и гражданская деятельность Георгия Ивановича была примером честности, искренности и принципиальности.

Мы, кому долгие годы довелось работать под его руководством, никогда не забудем этого замечательного человека и приложим все силы к тому, чтобы сохранить в журнале дух объективности и ответственности перед наукой, которые всегда утверждал Георгий Иванович.

Редколлегия

УДК 532.5.013.12:537.84

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ КАПЛИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

БЕРКОВСКИЙ Б. М., КРАКОВ М. С., НИКИФОРОВ И. В.,
ПОЛЕВИКОВ В. К.

В настоящее время отсутствуют точные данные о влиянии формы капли на ее гидродинамическое сопротивление и массообмен, без которых невозможен расчет массообменной аппаратуры [1–3]. Чаще всего используется предположение, что сопротивление жидкой эллипсоидальной капли при ее движении вдоль оси симметрии определяется произведением сопротивления жидкой сферической капли и коэффициента, учитывающего форму и определенного из сопротивления твердого эллипсоида, для которых известны точные решения. Ниже показано, что это предположение справедливо не всегда.

Капля поляризующейся жидкости в электрическом поле и капля магнитной жидкости в магнитном поле вытягиваются вдоль поля, приобретая форму, близкую к эллипсоидальной [3, 4]. При этом удлинение капле определяется балансом электромагнитных сил и сил поверхностного натяжения и пропорционально параметру $S = \mu_0 M^2 r_0 / \alpha$ для магнитной жидкости [3] (μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, M — намагниченность жидкости, α — коэффициент поверхностного натяжения) и параметру $\epsilon_0 E^2 r_0 / \alpha$ в электрическом поле [4] (ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, E — напряженность электрического поля). В случае электрогидродинамического удлинения в зависимости от соотношения проводимостей жидкостей внутри капли и вне ее возможен переход от сферы как к вытянутому, так и к сплюснутому эллипсоиду. Ниже ограничимся рассмотрением движения вытянутого эллипсоида вдоль оси его симметрии. Реальную каплю можно считать эллипсоидом вплоть до отношения полуосей $a/b \approx 5$ [5]. С точки зрения гидродинамики движение реальной капли не очень отличается от движения эллипсоидальной и при больших удлинениях.

Жидкий эллипсоид можно считать недеформируемым, если напряжения со стороны внешнего потока, имеющие порядок $\eta U / r_0$ (η — вязкость внешней жидкости, U — скорость капли, r_0 — радиус сферической капли), много меньше капиллярных сил, определяющих ее форму. Последние имеют порядок $2\alpha / R_1$, где R_1 — радиус кривизны в вершине вытянутого эллипсоида. Так как $R_1 = r_0 (b/a)^{1/2}$, то каплю можно считать недеформируемой при выполнении условия $A \ll 1$

$$A = \frac{U\eta}{2\alpha} \left(\frac{b}{a} \right)^{-1/2} \approx \frac{U\eta}{\alpha} \quad (1)$$

Для капель, падающих в жидкости вязкостью $\eta = 10^{-1}$ кг/м·с с коэффициентом межфазного натяжения $\alpha = 10^{-2}$ Н/м, условие $A \ll 1$ выполняется при $U \ll 10$ см/с, что соответствует требованию малых чисел Рейнольдса.

Таким образом, в работе рассматривается движение вытянутой эллипсоидальной недеформируемой капли при малых числах Рейнольдса вдоль оси симметрии эллипсоида под действием некоторой силы (гравитационной, магнитной или электрофоретической).

Введем систему координат вытянутого эллипсоида вращения σ, τ, φ [6] так, что координатная поверхность $\sigma_0 = \text{const}$ совпадает с поверхностью капли. Для осесимметричного течения, не зависящего от угла φ , уравнение неразрывности $\text{div } \mathbf{v} = 0$ позволяет ввести функцию тока ψ , связанную с компонентами скорости соотношениями

$$\begin{aligned} v_\sigma &= \frac{1}{c^2 \sqrt{(\sigma^2 - \tau^2)(\sigma^2 - 1)}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}; & c &= \frac{r_0}{\sqrt[3]{\sigma_0(\sigma_0^2 - 1)}} \\ v_\tau &= - \frac{1}{c^2 \sqrt{(\sigma^2 - \tau^2)(1 - \tau^2)}} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (2)$$

где v_σ и v_τ — составляющие вектора скорости ($v_\varphi = 0$), $2c$ — расстояние между фокусами эллипсоида (равенство для c получено из условия постоянства объема эллипсоида).

Уравнения Стокса, описывающие стационарное движение капли при малых числах Рейнольдса, записанные в безразмерном виде для переменных функция тока — вихрь, принимают вид [7]

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}} E^2 \psi, & E^2 [\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \omega] &= 0 \\ E^2 &= \frac{1}{\sigma^2 - \tau^2} \left[(\sigma^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + (1 - \tau^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

где вихрь ω определен как $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$, а в качестве масштабов выбраны скорость капли U и половина расстояния между фокусами эллипсоида c . При этом полуоси эллипсоида равны $a = c\sigma_0$, $b = c\sqrt{\sigma_0^2 - 1}$.

Граничные условия в системе координат, связанной с каплей, имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_\infty &= \frac{1}{2} (\sigma_\infty^2 - 1)(1 - \tau^2), & \sigma &= \sigma_\infty; & \psi_i &= 0, & \omega_i &= 0, & \sigma &= 1 \\ \psi_i &= 0, & \psi_e &= 0, & \omega_i &= 0, & \omega_e &= 0, & \tau &= \pm 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь, как и ниже, индексом i отмечены величины, характеризующие жидкость внутри капли, индексом e — вне ее.

На границе раздела $\sigma = \sigma_0$ должны выполняться условия равенства скоростей и равенство касательных напряжений

$$\begin{aligned} \psi_i &= 0, & \psi_e &= 0, & \frac{\partial \psi_i}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \psi_e}{\partial \sigma} \\ \mu \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sigma^2 - \tau^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \sigma} \right) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\sigma^2 - \tau^2} \frac{\partial \psi_e}{\partial \sigma} \right), & \mu &= \frac{\eta_i}{\eta_e} \end{aligned} \quad (5)$$

Сила, действующая на каплю со стороны потока, есть

$$\begin{aligned} F_z &= \int_S \mathbf{P} \mathbf{e}_z dS = \int_S (\Pi_{\sigma\sigma} \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_z + \Pi_{\sigma\tau} \mathbf{e}_\tau \mathbf{e}_z) dS \\ \Pi_{\sigma\sigma} &= -p + \frac{2\eta U}{c} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}} \frac{\partial v_\sigma}{\partial \sigma} - v_\tau \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{(\sigma^2 - \tau^2)^{3/2}} \right\} \\ \Pi_{\sigma\tau} &= \frac{\eta U}{c} \left\{ \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - \tau^2}} \frac{\partial v_\tau}{\partial \sigma} - v_\sigma \frac{\sigma \sqrt{\sigma^2 - 1}}{(\sigma^2 - \tau^2)^{3/2}} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Pi_{\sigma\sigma}$, $\Pi_{\sigma\tau}$ — компоненты тензора вязких напряжений в эллиптических координатах, S — поверхность эллипсоида, $\mathbf{e}_\sigma$ и $\mathbf{e}_\tau$ — единичные орты в си-

стеме координат вытянутого эллипсоида, $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии. С учетом явного вида $\Pi_{\sigma\sigma}$ и $\Pi_{\sigma\tau}$, а также того, что $\mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_z = \tau \sqrt{(\sigma^2 - 1)(\sigma^2 - \tau^2)}$, $\mathbf{e}_\tau \mathbf{e}_z = \sigma \sqrt{(1 - \tau^2)(\sigma^2 - \tau^2)}$, выражение (6) после несложных преобразований принимает вид

$$F_z = \pi \eta_e r_0 U \frac{(\sigma_0^2 - 1)^2}{\sqrt[3]{\sigma_0(\sigma_0^2 - 1)}} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}} \omega_e \right] \right\}_{\sigma=\sigma_0} d\tau \quad (7)$$

Так как интерес представляет влияние формы капли на ее сопротивление, то в качестве масштабного множителя естественно выбрать силу сопротивления сферической капли, равную [8] $F_z^0 = 2\pi \eta_e r_0 U (3\mu + 2)/(\mu + 1)$. Целью работы является определение коэффициента формы k_f , определяемого соотношением $k_f = F_z/F_z^0$ и характеризующего влияние формы жидкой капли на ее гидродинамическое сопротивление. Этот коэффициент определяется выражением

$$k_f = \frac{\mu + 1}{3\mu + 2} \frac{(\sigma_0^2 - 1)^2}{2 \sqrt[3]{\sigma_0(\sigma_0^2 - 1)}} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{\frac{1 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}} \omega_e \right] \right\}_{\sigma=\sigma_0} d\tau \quad (8)$$

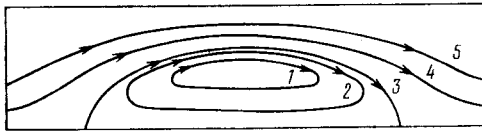
и для его определения необходимо решить задачу (3) с граничными условиями (4), (5) и найти ω_e .

Условие (5) приводит к невозможности разделения переменных и, следовательно, затрудняет аналитическое решение задачи. Поэтому сформулированная задача решалась численно методом сеток. Расчетная область $-1 \leq \tau \leq 1$, $1 \leq \sigma \leq \sigma_\infty$, соответствующая меридиональному сечению эллипсоида, покрывалась равномерной сеткой с шагом $h_\tau = 0,1$ по τ и с шагом $h_\sigma = (\sigma_0 - 1)/20$ по σ во внутренней области. Во внешней области сетка по σ выбиралась неравномерной, с шагом, растущим по линейному закону по мере удаления от поверхности эллипсоида. Вторые дифференциальные производные заменялись обычными трехточечными разностными производными, имеющими второй порядок аппроксимации по равномерной сетке и первый по неравномерной. Граничные условия для ψ и ω на оси симметрии и на бесконечности задавались точно в виде (4), (7). На поверхности вытянутого эллипсоида значение ψ вычислялось точно в соответствии с (5), а значение ω — из разностной формулы, полученной путем аппроксимации условий (5).

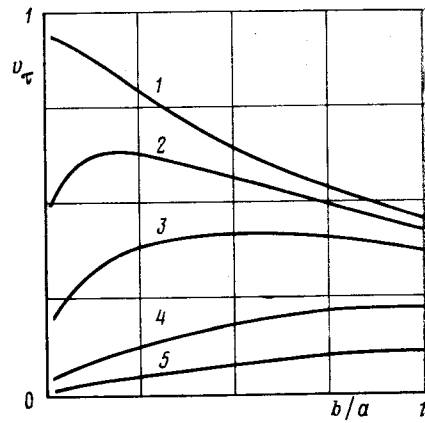
Система разностных уравнений решалась в едином итерационном цикле, который строился на базе метода Зейделя с релаксацией [9]. Начальное итерационное приближение задавалось нулевым. Число узлов сетки поддерживалось постоянным 21×65 , а шаги по σ по внешней сеточной области определялись по формулам $h_1 = h_\sigma$, $h_m = 1,4 h_{m-1}$, $m = 2, \dots, 44$. При этом расстояние, принятое в расчетах за «бесконечность», превышало размеры жидкого эллипсоида не менее чем в 20 раз. Интеграл в формуле (8) вычислялся по методу Симпсона.

В результате решения задачи были найдены поля значений функции тока и вихря в области решения в широком диапазоне изменения параметров σ_0 (т. е. удлинения капли) и μ . Типичная картина линий тока при обтекании эллипсоидальной капли изображена на фиг. 1, построенной для случая $b/a = 0,5$, $\mu = 0,01$ (кривые 1–5 соответствуют значениям функции тока $10^2 \psi = -2,1; -0,7; 0; 3,8; 8,2$). Качественно картина соответствует стоковскому обтеканию сферической капли. Величиной, характеризующей интенсивность циркуляции капли, может служить скорость жидкости на границе раздела капли в ее экваториальной плоскости. На фиг. 2 изображена зависимость безразмерной скорости v_τ при $\tau = 0$ от отношения полуосей эллипсоида при $\mu = 0, 0,05; 0,2; 1; 3$ (кривые 1–5). Видно, что величина относительной вязкости качественно влияет на характер изменения скорости при удлинении капли. Если вязкость жидкости внутри капли не слишком мала ($\mu \geq 0,5$), то с ростом удлинения скорость v_τ при $\tau = 0$ (т. е. и циркуляция в капле в целом) падает. Если же вязкость мала, то скорость на границе раздела возрастает с удлинением капли до некоторого значения b/a (зависящего от μ), а затем уменьшается.

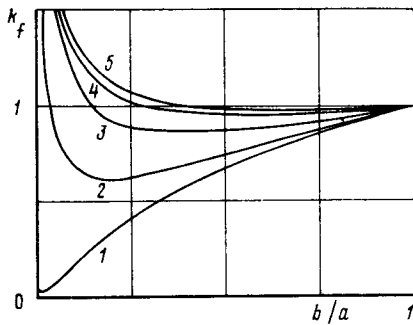
Это качественное отличие сказывается и на характере зависимости коэффициента формы k_f от удлинения. Действительно, из фиг. 3 (кривые



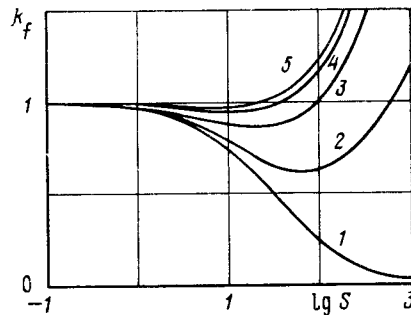
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

1, 2, 3, 5 соответствуют значениям $\mu=0; 0,05; 0,2; 1$, кривая 4 — значениям $\mu=0,5$ и ∞) видно, что при $\mu \geq 0,5$ зависимость k_f от b/a не очень сильно отличается от соответствующей зависимости для твердого эллипсоида. При этом до $b/a > 0,3$ величина k_f отличается от единицы не более чем на 5%. Следовательно, при расчетах технологических процессов в эмульсиях с деформируемыми каплями при относительной вязкости $\mu = \eta_i/\eta_e \geq 0,5$ справедливо часто используемое предположение о том, что сопротивление жидкого эллипсоида определяется произведением сопротивления жидкой сферы и коэффициента формы, определяемого сопротивлением твердого эллипсоида. При этом, если деформация капель не очень велика ($b/a > 0,3$), в технологических расчетах ее вообще можно не учитывать, а использовать данные для сферы, так как $k_f \approx 1$.

Если же вязкость жидкости в капле мала ($\mu \leq 0,5$), то форма капли существенно влияет на ее сопротивление: оно значительно уменьшается с удлинением капли. Наибольший эффект достигается при $\mu=0$: при отношении полуосей $b/a=0,1$, что соответствует пятикратному удлинению капли $a/r_0 \approx 5$, сопротивление ее уменьшается в 6 раз. Случай $\mu=0$ является не только предельным, но имеет и самостоятельный физический аналог: пузырек в магнитной жидкости, так же как и капля магнитной жидкости в немагнитной, вытягивается вдоль магнитного поля. Поэтому зависимость $k_f(b/a)$ при $\mu=0$ полезна при расчете устройств, использующих барботаж газа через слой магнитной жидкости.

Увеличение влияния формы капли на ее сопротивление с убыванием вязкости немонотонно: кривая для $\mu=1$ лежит выше кривой для $\mu=\infty$ (фиг. 3). Максимум зависимости $k_f(\mu)$ наблюдается при $\mu \approx 1,3$, а при $\mu \approx 0,5$ и $\mu=\infty$ кривые $k_f(b/a)$ практически совпадают.

Для капли магнитной жидкости, взвешенной в немагнитной жидкости, удлинение определяется параметром S и для эллипсоидальной капли имеет вид [10]

$$S = 4\sqrt[3]{m^2} \left(2m - \frac{m^2 + 1}{m^2} \right) \quad (9)$$

где $m = a/b$. С учетом выражения (9) зависимость представлена на фиг. 4 в виде $k_f(S)$ и в явном виде определяет влияние магнитного поля на сопротивление капли магнитной жидкости при малых числах Рейнольдса (номера кривых соответствуют фиг. 3).

Таким образом, необходимо учитывать влияние формы капель (пузырей) на величину силы сопротивления, особенно при малой вязкости жидкости внутри капли, когда сопротивление может уменьшаться в несколько раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панченков Г. М., Цабек Л. К. Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле. М.: Химия, 1969. 190 с.
2. Гогосов В. В., Налетова В. А., Тактаров Н. Г., Чыонг За Бинь, Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся дисперсных сред. Приложения к задачам химической технологии. — В кн.: Всесоюз. симп. «Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей», Юрмала, 1980. Тез. докл. Саласпилс, 1980, с. 107–114.
3. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г. Исследование формы капли намагничивающейся жидкости в однородном магнитном поле. — Магнит. гидродинамика, 1978, № 3, с. 131–134.
4. Torza S., Cox R. G., Mason S. G. Electrohydrodynamic deformation and burst of liquid drops. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 1974, v. 268, № 1198, p. 295–349.
5. Берковский Б. М., Смирнов Н. Н. Некоторые решения уравнения поверхности намагничивающейся жидкости. — Магнит. гидродинамика, 1984, № 1, с. 15–20.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 831 с.
7. Халпелл Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 63 с.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Роза Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Гостехиздат, 1963. 727 с.
9. Полевиков В. К. Применение метода релаксации для решения стационарных разностных задач конвекции. — Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, т. 21, № 1, с. 127–138.
10. Блаум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980. 355 с.

Минск

Поступила в редакцию
28.11.1985