ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 3
СЕНТЯБРЬ

МИНСК · ИЗДАТЕЛЬСТВО БГУ имени В. И. ЛЕНИНА · 1983

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \| x_{k+1} - x_k \| \leqslant \left[B \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha_k \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2} \right) \right] \| F(x_0) \| \leqslant$$

$\leqslant B \| F(x_0) \| (S_{n+p-1} - S_{n-1})$. В силу сходимости последовательности $\{S_n\}$ и полноты пространства X следует сходимость последовательности $\{x_n\}$. Обозначим $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. То, что x^* является решением уравнения (1), следует из соотношения $\| F(x_n) \| \leqslant \| F(x_0) \| \prod\limits_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha_i}{2} \right)$ предельным переходом при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев А. С.— Сибирский матем. ж., 1961, т. 2, № 2.
2. Канторович Л. В.— Труды Математического института имени В. А. Стеклова, 1949, т. 27, с. 104.
3. Мадорский В. М.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1979, № 3, с. 16.

Поступила в редакцию
30.04.82.

Кафедра численных методов и программирования

УДК 519.6 : 536.25

В. К. ПОЛЕВИКОВ

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЕТКИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ

Одна из проблем, возникающих при численном исследовании конвективных явлений,— проблема точности результатов в режиме формирующегося пограничного слоя. Обычная процедура увеличения числа сеточных узлов становится в этих условиях либо невозможной, либо нежелательной. Поэтому точность решения повышают за счет улучшения аппроксимационных свойств разностной задачи [1—4] и путем неравномерного распределения узлов на сетке в зависимости от градиента скорости (температуры) [1, 5, 6]. Неравномерная сетка, как правило, строится интуитивно (либо на основании уже имеющейся информации о структуре искомого решения) и не корректируется при счете. В данной работе предлагается простой алгоритм автоматического конструирования неравномерной сетки в процессе решения задачи.

Сначала рассмотрим одномерный случай. Пусть $v = v(x)$ — скорость движения жидкости, определяемая в результате решения одномерной задачи конвекции на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Будем считать, что $x_0 = a$ и $x_N = b$ — граничные узлы сетки, введенной в области определения задачи; N — заданное число разбиений сетки. Требуется распределить внутренние узлы $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ так, чтобы их плотность изменялась согласованно с величиной скорости. Для этого каждому шагу $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, N}$ поставим в соответствие разностное число Рейнольдса [7] $R_i = 0{,}5(x_i - x_{i-1})(|v_{i-1}| + |v_i|)/2$, где $v_i = v(x_i)$ и пусть $|v_{i-1}| + |v_i| \neq 0$, и потребуем выполнения условий

$$R_i = R_{i+1}, \ i = \overline{1, N-1}. \tag{1}$$

Отсюда получаем разностную задачу для нахождения $x_1, \ldots, x_{N-1}$:

$$\begin{gathered} (|v_{i-1}| + |v_i|)(x_i - x_{i-1}) = (|v_i| + |v_{i+1}|)(x_{i+1} - x_i), \\ i = \overline{1, N-1}; \ x_0 = a, x_N = b. \end{gathered} \tag{2}$$

Решение задачи (2) можно организовать в виде следующего итерационного процесса:

$$(|v_{i-1}^{(s)}| + |v_i^{(s)}|)\, x_{i-1}^{(s+1)} - (|v_{i-1}^{(s)}| + 2|v_i^{(s)}| + |v_{i+1}^{(s)}|)\, x_i^{(s+1)} + (|v_i^{(s)}| + |v_{i+1}^{(s)}|)\, x_{i+1}^{(s+1)} = 0,$$

$$i=\overline{1,\ N-1};\ x_0^{(s+1)}=a,\ x_N^{(s+1)}=b, \tag{3}$$

где $s=0,\ 1,\ \ldots$ — номер итерации, $v_i^{(s)}=v\,(x_i^{(s)})$. Итерационное приближение $\{x_i^{(s+1)}\}$ находим методом прогонки, который здесь абсолютно устойчив. Коэффициенты $v_i^{(s+1)}$, $i=\overline{1,\ N-1}$ вычисляем, решая уравнения конвекции на новой сетке $\{x_i^{(s+1)}\}$. Начальную сетку можно взять равномерной.

Пусть теперь задача конвекции двумерная, а областью ее определения является прямоугольник D $(a_1\leqslant x\leqslant b_1,\ a_2\leqslant y\leqslant b_2)$. Обозначим x-компоненту вектора скорости через $v_1=v_1(x,\ y)$, а y-компоненту через $v_2=v_2(x,\ y)$. В прямоугольнике D построим неравномерную сетку $\{(x_i,\ y_j)\}$ с числом разбиений N_1 и N_2 по осям x и y, соответственно, положив $x_0=a_1$, $x_{N_1}=b_1$, $y_0=a_2$, $y_{N_2}=b_2$. Сеточные координаты $x_1,\ \ldots$ $\ldots,\ x_{N_1-1}$ и $y_1,\ \ldots,\ y_{N_2-1}$ ищем по аналогии с одномерным случаем, согласуя их распределение со средними квадратичными величинами скорости

$$\begin{aligned}\bar{u}\,(x)&=\left[\frac{1}{b_2-a_2}\int\limits_{a_2}^{b_2}(v_1^2\,(x,\ y)+v_2^2\,(x,\ y))\,dy\right]^{1/2},\\ \bar{v}\,(y)&=\left[\frac{1}{b_1-a_1}\int\limits_{a_1}^{b_1}(v_1^2\,(x,\ y)+v_2^2\,(x,\ y))\,dx\right]^{1/2}.\end{aligned} \tag{4}$$

Так что алгоритм построения координат $x_1,\ \ldots,\ x_{N_1-1}$ примет вид:

$$\begin{gathered}(\bar{u}_{i-1}^{(s)}+\bar{u}_i^{(s)})\,x_{i-1}^{(s+1)}-(\bar{u}_{i-1}^{(s)}+2\bar{u}_i^{(s)}+\bar{u}_{i+1}^{(s)})\,x_i^{(s+1)}+(\bar{u}_i^{(s)}+\bar{u}_{i+1}^{(s)})\,x_{i+1}^{(s+1)}=0,\\ i=\overline{1,\ N_1-1};\ x_0^{(s+1)}=a_1,\ x_{N_1}^{(s+1)}=b_1.\end{gathered} \tag{5}$$

Аналогично для координат $y_1,\ \ldots,\ y_{N_2-1}$:

$$\begin{gathered}(\bar{v}_{j-1}^{(s)}+\bar{v}_j^{(s)})\,y_{j-1}^{(s+1)}-(\bar{v}_{j-1}^{(s)}+2\bar{v}_j^{(s)}+\bar{v}_{j+1}^{(s)})\,y_j^{(s+1)}+(\bar{v}_j^{(s)}+\bar{v}_{j+1}^{(s)})\,y_{j+1}^{(s+1)}=0,\\ j=\overline{1,\ N_2-1};\ y_0^{(s+1)}=a_2,\ y_{N_2}^{s+1}=b_2.\end{gathered} \tag{6}$$

Решая прогонкой задачи (5) и (6), определим положение сеточных узлов на любой итерации. Итерационные приближения для компонент скорости v_1 и v_2 находим как решение рассматриваемой двумерной задачи конвекции на сетке, соответствующей номеру итерации. Интегралы $\bar{u}_i^{(s)}=\bar{u}\,(x_i^{(s)})$, $\bar{v}_j^{(s)}=\bar{v}\,(y_j^{(s)})$ можно вычислить на сетке $\{(x_i^{(s)},\ y_j^{(s)})\}$ по известным квадратурным правилам.

Если конвективная задача стационарна, то ее решение целесообразно проводить совместно с процедурой построения сетки, вычисляя одну итерацию алгоритма корректировки (5), (6) после каждой или нескольких итераций алгоритма решения конвективных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berkovsky B. M., Polevikov V. K.— In: Heat Transfer 1974. Tokyo, 1974, v. 3, p. 85.
2. Буров А. Н.— В сб.: Математические модели течений жидкости. Новосибирск, 1978, с. 21.
3. Полевиков В. К.— Там же, 1978, с. 207.
4. Полевиков В. К.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 10, с. 872.
5. Грязнов В. Л., Полежаев В. И.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5, с. 8.
6. Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И. Численное моделирование переходного и турбулентного режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье-Стокса.— М., Ин-т проблем механики АН СССР, препринт № 101, 1978.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977, с. 185.

Поступила в редакцию
27.10.82.

Кафедра вычислительной математики