

УДК 519.6:536.24

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
СТАЦИОНАРНЫХ РАЗНОСТНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ

В. К. ПОЛЕВИКОВ

(Минск)

На основе метода релаксации предлагается эффективный способ улучшения сходимости итерационного процесса типа Зейделя при решении стационарных разностных задач конвекции. Путем численных экспериментов найдены оптимальные параметры релаксации для уравнений температуры, функции тока и вихря в широком диапазоне чисел Рэлея. Построен алгоритм стабилизации итерационного процесса при больших числах Рэлея.

Введение

Решение стационарных разностных задач конвекции требует, ввиду их нелинейности, применения итерационных процедур. В большинстве работ для повышения устойчивости алгоритма внешний итерационный процесс дополняется внутренними итерациями для каждого из уравнений. Уравнение Пуассона для функции тока при этом либо итерируется, либо решается прямыми методами, например методом быстрого преобразования Фурье. Уравнения для температуры и вихря иногда итерируются во внутреннем итерационном цикле независимо друг от друга, но чаще считаются по схеме продольно-поперечной прогонки.

Среди разнообразных приемов организации вычислительного процесса, использующихся на практике, минимальными затратами машинной памяти и машинного времени на расчет одного итерационного слоя, простой программной реализации отличается метод, примененный, например, в работах [1-3], который представляет собой, по существу, аналог метода Зейделя. По данным [4], затраты машинного времени на одну итерацию у метода Зейделя примерно в 6 раз меньше, чем у метода продольно-поперечной прогонки. Его недостаток — неудовлетворительные показатели по вычислительной устойчивости и скорости сходимости в условиях развитой конвекции, даже в случае монотонных аппроксимаций. Уменьшить дестабилизирующее влияние числа Рэлея (числа Рейнольдса) оказалось возможным путем введения в этот алгоритм параметров релаксации [5-11]. Однако сложный вид уравнений конвекции практически исключает применение результатов линейной теории оптимизации этих параметров. Ясность в данный вопрос могут в настоящее время внести, по-видимому, лишь численные эксперименты. Основное содержание настоящей работы

и составляют численные эксперименты на тестовых задачах по исследованию оптимальных параметров релаксации для уравнений конвекции в модифицированном методе Зейделя в случае монотонной схемы второго порядка. Уделено внимание формализации полученных сведений с целью их возможного использования при решении других задач конвекции.

§ 1. Формулировка тестовых задач

Численные эксперименты осуществлялись на двух известных задачах. Первая из них — о стационарном конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области при однородном подогреве сбоку [12–14]. Объектом второй тестовой задачи является та же физическая ситуация, но нагрев жидкости осуществляется через верхнюю границу по синусоидальному закону [14, 15].

Введем декартову прямоугольную систему координат с осью абсцисс x_1 , осью ординат x_2 и началом в левом нижнем углу квадрата. Тогда математическую модель для выбранных тестовых задач составляет система безразмерных уравнений [12]

$$(1.1)' \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right),$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \varphi = 0,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_1}.$$

Здесь T , ψ и φ — безразмерные температура, функция тока и завихренность, Pr — число Прандтля, Ra — число Рэлея. Функция тока связана с компонентами скорости соотношениями $v_1 = \partial \psi / \partial x_2$, $v_2 = -\partial \psi / \partial x_1$.

Предполагается, что границы области неподвижны, непроницаемы и на них имеет место условие прилипания

$$(1.4) \quad \psi|_{\text{гп}} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\text{гп}} = 0.$$

Для температуры задаются краевые условия I рода: в первой задаче

$$(1.5) \quad T(0, x_2) = 0, \quad T(1, x_2) = 1, \quad T(x_1, 0) = T(x_1, 1) = x_1,$$

во второй задаче

$$(1.6) \quad T(x_1, 1) = \sin \pi x_1, \quad T(x_1, 0) = T(0, x_2) = T(1, x_2) = 0.$$

Число Прандтля в данной работе принималось фиксированным: $\text{Pr} = 1$.

§ 2. Метод решения и методика численного эксперимента

Уравнения (1.1)–(1.3) аппроксимировались по монотонной схеме А. А. Самарского [16, 17] второго порядка точности. Производные в коэффициентах заменялись центральными разностями. Полученная система

нелинейных разностных уравнений решалась в едином итерационном цикле, который строился на базе метода Зейделя с релаксацией. Так что во внутренних узлах вычисления совершались по формулам

$$\psi_n = (1 - q^\psi) \psi_{n-1} + \frac{1}{4} q^\psi \left[\sum_{\alpha=1}^2 (\psi_n^{(-1\alpha)} - \psi_{n-1}^{(+1\alpha)}) + h^2 \varphi_{n-1} \right]$$

$$T_n = (1 - q^T) T_{n-1} + q^T \sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha n} + T_n^{(-1\alpha)} +$$

$$+ B_{\alpha n} T_{n-1}^{(+1\alpha)}) \left[\sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha n} + B_{\alpha n}) \right]^{-1},$$

$$\varphi_n = (1 - q^\varphi) \varphi_{n-1} + q^\varphi \left[\sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha n} \varphi_n^{(-1\alpha)} + B_{\alpha n} \varphi_{n-1}^{(+1\alpha)}) +$$

$$+ Ra \frac{h}{2} (T_{n-1}^{(+11)} - T_n^{(-11)}) \right] \left[\sum_{\alpha=1}^2 (A_{\alpha n} + B_{\alpha n}) \right]^{-1},$$

где

$$A_{\alpha n} = \frac{1}{1 + |R_{\alpha n}|} + 2R_{\alpha n}^+, \quad B_{\alpha n} = \frac{1}{1 + |R_{\alpha n}|} - 2R_{\alpha n}^-,$$

$$R_{1n} = (\psi_{n-1}^{(+12)} - \psi_n^{(-12)})/4, \quad R_{2n} = -(\psi_{n-1}^{(+11)} - \psi_n^{(-11)})/4,$$

q^ψ , q^T и q^φ — параметры релаксации, n — номер итерации, h — шаг квадратной сетки. Остальные обозначения общепринятые [17]. Индексы сеточных узлов для удобства опущены.

Краевые условия для функции тока и температуры задавались в соответствии с (1.4) и (1.5) или (1.6). Для аппроксимации φ на границе применялась разностная формула точности $O(h^4)$ (см. [11, 18]). Так, например, на границе $x_2=0$ завихренность вычислялась в виде

$$\begin{aligned} \varphi_n = & (1 - q^\varphi) \varphi_{n-1} + q^\varphi \left\{ -13\varphi_{n-1}^{(+12)} - \varphi_{n-1}^{(+11, +12)} - \varphi_{n-1}^{(-11, +12)} + \right. \\ & + \left[1 + \frac{7}{2} (\psi_{n-1}^{(+12)})^+ \right] \varphi_{n-1}^{(+11)} + \left[1 - \frac{7}{2} (\psi_{n-1}^{(+12)})^- \right] \varphi_n^{(-11)} - \\ & - \frac{90}{h^2} \psi_{n-1}^{(+12)} - Ra h \left[T_n^{(+11)} - T_n^{(-11)} + \frac{7}{8} (T_{n-1}^{(+11, +12)} - \right. \\ & \left. \left. - T_{n-1}^{(-11, +12)}) \right] \right\} \left(32 + \frac{7}{2} |\psi_{n-1}^{(+12)}| \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогично — на других границах. В углах квадрата полагалось $\varphi=0$.

Исследования проводились на равномерной сетке Ω_h с числом узлов $M=11 \times 11$, 21×21 и 41×41 . Начальным приближением для итерационного процесса в первой задаче выбиралось решение в режиме теплопроводности: $T_0=x_1$, $\psi_0=\varphi_0=0$. Во второй задаче начальное состояние задавалось нулевым: $T_0=\psi_0=\varphi_0=0$. Расчеты выполнялись на машине БЭСМ-6.

Сходимость итераций считалась достигнутой, если условие

$$(2.1) \quad \varepsilon_n = \sum_{m=n-N_0+1}^n \frac{|\varepsilon_m|}{N_0} < 10^{-3}$$

удовлетворялось для какого-нибудь номера $n=N$. Здесь

$$|\varepsilon_n| = \max_{x \in \bar{\omega}_h} (|\varepsilon_n^T(x)|, |\varepsilon_n^\psi(x)|, |\varepsilon_n^\varphi(x)|),$$

$$\varepsilon_n^\xi(x) = \frac{\xi_n(x) - \xi_{n-1}(x)}{q^\xi \xi_{n-1}}, \quad \bar{\xi}_n = \sum_{x \in \bar{\omega}_h} \frac{|\xi_n(x)|}{M}, \quad \xi = T, \psi, \varphi.$$

Номер N_0 — наименьший из номеров n , при которых условие (2.1) выполняется. Величина N_0 задавалась по формуле $N_0 = [2.5 M^{1/2}]$ (см. § 4).

Структура сходимости контролировалась величиной ε_n , равной тому значению $\varepsilon_n^T(x)$, $\varepsilon_n^\psi(x)$, $\varepsilon_n^\varphi(x)$ на сетке $\bar{\omega}_h$, которое по модулю является максимальным.

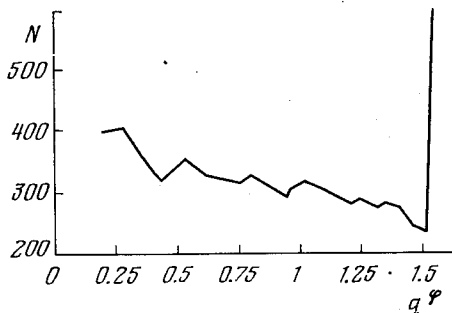
Для построения оптимального набора параметров релаксации $q_{\text{опт}} = \{\tilde{q}^T, \tilde{q}^\psi, \tilde{q}^\varphi\}$, обеспечивающего при данном Ra наивысшую скорость сходимости итераций, решалась задача минимизации функции $N(q^T, q^\psi, q^\varphi)$.

Для этого применялся метод покоординатного спуска. Машинная программа составлялась так, что i -е приближение $\{\tilde{q}_i^T, \tilde{q}_i^\psi, \tilde{q}_i^\varphi\}$ определялось в результате вычисления сначала $\tilde{q}_i^\varphi$ при $q^T = \tilde{q}_{i-1}^T$ и $q^\psi = \tilde{q}_{i-1}^\psi$, затем $\tilde{q}_i^\psi$ при $q^T = \tilde{q}_{i-1}^T$ и только что полученном $q^\varphi = \tilde{q}_i^\varphi$ и, наконец, $\tilde{q}_i^T$ при $q^\psi = \tilde{q}_i^\psi$ и $q^\varphi = \tilde{q}_i^\varphi$. Вычисления прекращались, если условие

$$\max(|\tilde{q}_i^T - \tilde{q}_{i-1}^T|, |\tilde{q}_i^\psi - \tilde{q}_{i-1}^\psi|, |\tilde{q}_i^\varphi - \tilde{q}_{i-1}^\varphi|) < \delta = \begin{cases} 10^{-2}, & Ra \leq 10^5, \\ 10^{-3}, & Ra > 10^5, \end{cases}$$

удовлетворялось для какого-нибудь $i=I$, и приближение $\{\tilde{q}_I^T, \tilde{q}_I^\psi, \tilde{q}_I^\varphi\}$ считалось решением задачи. Решение одномерных задач оптимизации для вычисления компонент $\tilde{q}_i^T$, $\tilde{q}_i^\psi$ и $\tilde{q}_i^\varphi$ осуществлялось на численном эксперименте. Точность δ достигалась на последовательности сеток для сужающейся области существования экстремума. Если минимумов оказывалось несколько, то разрабатывался каждый из них.

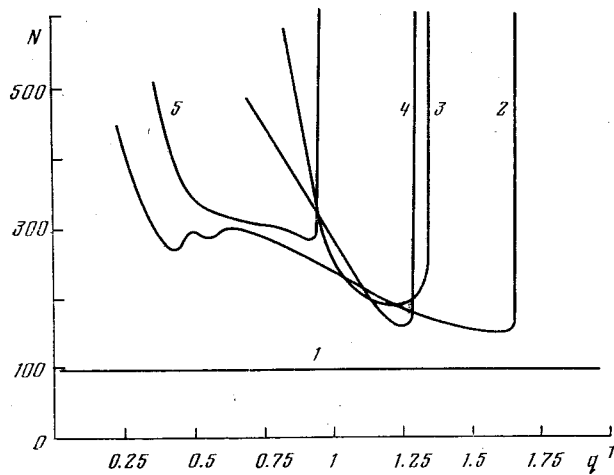
Следует отметить, что если в качестве критерия сходимости брать условие $|\varepsilon_n| < 10^{-3}$, то зависимость N от параметров релаксации носит сложный пилообразный характер. На фиг. 1 — типичный график такой зависимости (первая задача, $Ra = 10^4$, $h = 1/20$, $q^T = q^\psi = 1$). Это обстоятельство могло бы существенно затруднить поиск оптимальных параметров. Что касается интегрального признака (2.1), то он в исследованном диапазоне чисел Рэлея обеспечил достаточную гладкость функции $N(q^T, q^\psi, q^\varphi)$.



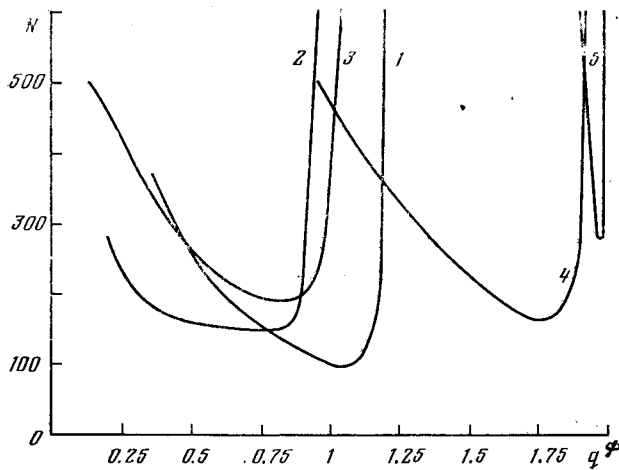
Фиг. 1

§ 3. Основные результаты

Фиг. 2—4 иллюстрируют влияние каждого из параметров q^T , q^ψ , q^φ на скорость установления итераций (первая задача, $h=1/20$, кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют $Ra=10, 10^4, 5 \cdot 10^4, 10^5, 10^6$). При больших Ra , как

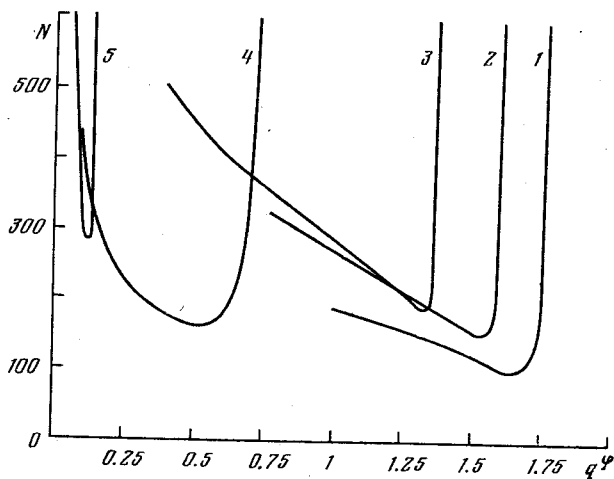
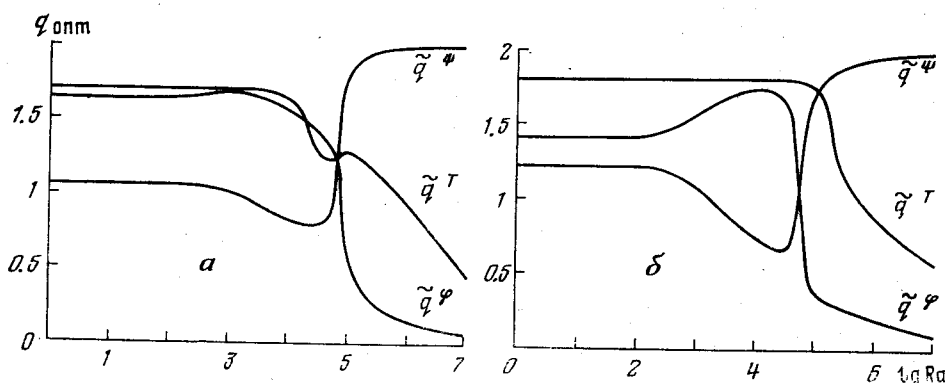


Фиг. 2. $q^\psi = \tilde{q}^\psi$, $q^\varphi = \tilde{q}^\varphi$



Фиг. 3. $q^T = \tilde{q}^T$, $q^\psi = \tilde{q}^\psi$

видим, даже небольшое отклонение какого-либо из параметров релаксации от оптимального значения пагубно отражается на устойчивости алгоритма. Наиболее стабилизирующее влияние на вычисления оказывает параметр q^φ , наименее существенна релаксация уравнения температуры. При малых числах Рэлея ($Ra < 10^4$) релаксацией уравнений температуры и функции тока можно вообще не пользоваться, так как практически оптимальная сходимость достигается за счет одного лишь q^φ .

Фиг. 4. $q^T = \tilde{q}^T$, $q^* = \tilde{q}^*$.

Фиг. 5

На фиг. 5 изображены кривые зависимости компонент оптимального набора $q_{\text{опт}}$ от числа Рэлея (a — первая задача, b — вторая задача, $h=1/20$). Нетрудно увидеть ряд закономерностей. В области $Ra < 10^3$, где основным механизмом распространения тепла является теплопроводность, наиболее быстрое установление итераций обеспечивается при верхней релаксации всех функций. Резкая смена оптимальных режимов релаксации при $Ra \approx 5 \cdot 10^4$ соответствует началу формирования погранслоя [12, 14]. В условиях формирующегося погранслоя величина $\tilde{q}^*$ с ростом Ra монотонно стремится к верхнему пределу 2, а $\tilde{q}^*$ и $\tilde{q}^T$ убывают к нулю.

В табл. 1, 2 собраны основные числовые результаты проведенного исследования. Нечетные строки табл. 1 соответствуют первой задаче, четные — второй, а табл. 2 относится к первой задаче; N — значение номера N при $q^T = \tilde{q}^T$, $q^* = \tilde{q}^*$, $q^* = \tilde{q}^*$. Результаты, приведенные в табл. 1, получены на сетке 21×21 . Видно, что даже при $Ra < 10^5$ релаксация заметно сокращает время установления. В условиях же высокоинтенсивной конвекции, когда итерации Зейделя уже не сходятся, методом релаксации получены стационарные решения при небольших затратах машинного вре-

Таблица 1

Ra	$\tilde{q}^T$	$\tilde{q}^\Psi$	$\tilde{q}^\Phi$	$N, q^T = q^\Psi = q^\Phi = 1$	$\tilde{N}$
10	1.7	1.05	1.64	195	98
	1.8	1.22	1.41	226	101
10^2	1.7	1.05	1.64	195	98
	1.8	1.22	1.41	225	101
10^3	1.7	1.0	1.67	201	98
	1.8	1.08	1.55	219	98
$5 \cdot 10^3$	1.65	0.85	1.6	295	113
	1.8	0.84	1.7	204	94
10^4	1.63	0.83	1.55	337	151
	1.8	0.75	1.73	224	97
$3.2 \cdot 10^4$	1.28	0.79	1.4	320	184
	1.8	0.65	1.69	330	112
$5 \cdot 10^4$	1.22	0.85	1.33	339	189
	1.78	1.0	1.32	397	160
10^5	1.28	1.77	0.53	сходимости нет	161
	1.75	1.7	0.35	481	128
$3.2 \cdot 10^5$	1.09	1.95	0.23	сходимости нет	211
	1.12	1.88	0.25	1187	168
10^6	0.93	1.97	0.123	сходимости нет	280
	0.87	1.94	0.165		224
10^7	0.435	1.988	0.042	сходимости нет	884
	0.56	1.955	0.085		350

Таблица 2

Ra	Сетка	$\tilde{q}^T$	$\tilde{q}^\Psi$	$\tilde{q}^\Phi$	$N, q^T = q^\Psi = q^\Phi = 1$	$\tilde{N}$
10	11×11	1.5	0.97	1.43	71	52
	21×21	1.7	1.05	1.64	195	98
	41×41	1.8	1.19	1.68	514	234
$3.2 \cdot 10^4$	11×11	1.25	0.77	1.06	167	109
	21×21	1.28	0.79	1.4	320	184
	41×41	1.46	0.85	1.62	866	375
10^6	11×11	0.99	1.686	0.155	сходимости нет	173
	21×21	0.93	1.97	0.123		280
	41×41	1.215	1.976	0.195		524

мени. Влияние сетки на оптимальные параметры релаксации носит качественно такой же характер, как и в линейном случае [4]: их величина растет с уменьшением h . Некоторое отклонение от этого правила наблюдалось на грубых сетках при больших Ra (табл. 2). Оно касалось лишь параметров $\tilde{q}^T$ и $\tilde{q}^\Phi$ и обусловлено, вероятно, зависимостью от сетки коэффициентов разностных уравнений для температуры и вихря [8].

§ 4. Алгоритм стабилизации итерационного процесса при больших числах Рэлея

Релаксация температуры, как отмечалось, вносит сравнительно небольшой вклад в ускорение сходимости итераций даже в области высоких Ra. В самом деле, если положить $q^T=1$ и найти оптимальные параметры ре-

лаксации функции тока и вихря (обозначим их через $\tilde{q}^*$ и $\tilde{q}^\circ$), то, например, при $Ra=10^6$ число итераций $N=\tilde{N}^*$, соответствующее набору $\{1, \tilde{q}^*, \tilde{q}^\circ\}$, лишь в 1.2 раза превышает значение $N=\tilde{N}$ при наилучшем наборе $\{\tilde{q}^T, \tilde{q}^*, \tilde{q}^\circ\}$. Графики $\tilde{q}^*(Ra)$ и $\tilde{q}^\circ(Ra)$ качественно аналогичны соответствующим графикам $\tilde{q}^*(Ra)$ и $\tilde{q}^\circ(Ra)$, приведенным на фиг. 5. В диапазоне $Ra>10^5$ они проходят чуть ниже кривых $\tilde{q}^*(Ra)$ и $\tilde{q}^\circ(Ra)$, располагаясь почти симметрично относительно единицы. Следовательно, при $Ra>10^5$ близкую к оптимальной скорость сходимости можно ожидать, решая одномерную задачу оптимизации q° , где $0<q^\circ\leq 1$, при $q^T=1$ и $q^*=2-q^\circ$.

Далее, анализ структуры итерационного процесса показал, что при больших числах Рэлея ($Ra>10^4$) сходимость носит колебательный характер и контролируется главным образом завихренностью, т. е. в критерии (2.1) $\varepsilon_n=\varepsilon_n^\circ$. Период колебаний D знакопеременной величины ε_n обратно пропорционален q° . Причем при оптимальных наборах $\{\tilde{q}^T, \tilde{q}^*, \tilde{q}^\circ\}$ и $\{1, \tilde{q}^*, \tilde{q}^\circ\}$ осцилляции совершаются примерно с одинаковым периодом $D=\tilde{D}$, зависимость которого как от Ra из диапазона $10^5\leq Ra\leq 10^7$, так и от краевых условий оказалась практически несущественной. По мере изменения q° вверх и вниз от оптимального значения уменьшение и рост D происходят стремительно. Эксперименты выявили заметное влияние сетки на период колебаний $\tilde{D}$ в оптимальном режиме сходимости. Оно удовлетворительно описывается эмпирической формулой

$$(4.1) \quad \tilde{D}\approx kM^{1/2}, \quad k=5.$$

С учетом этих обстоятельств нетрудно построить простой алгоритм стабилизации итераций в условиях высокоинтенсивной конвекции. Изложим его суть.

1. Вычисление температуры производим при $q^T=1$.

2. В начале счета задаем первые приближения $q^\circ=q_1^\circ$ и $q^*=q_1^*$. Учитывая симметрию графиков $\tilde{q}^\circ(Ra)$ и $\tilde{q}^*(Ra)$ при больших Ra , выбираем их следующим образом:

$$0\leq a_1 < q_1^\circ \leq b_1 \leq 1, \quad q_1^*=2-q_1^\circ,$$

где a_1 и b_1 — границы области изменения оптимального параметра $\tilde{q}^\circ$. Если более точная информация о границах этой области отсутствует, то можно положить $a_1=0$, $b_1=1$.

3. Предусматриваем запоминание тех номеров n , при которых ε_n меняет знак, и находим период D .

4. Начиная с $n=\tilde{D}$, где $\tilde{D}$ определяется по формуле (4.1), через каждые $N_0=[\tilde{D}/2]$ итераций сравниваем средние характеристики $\bar{\varepsilon}_n$ и $\bar{\varepsilon}_{n-N_0}$. Показателем хорошей сходимости считаем выполнение условия

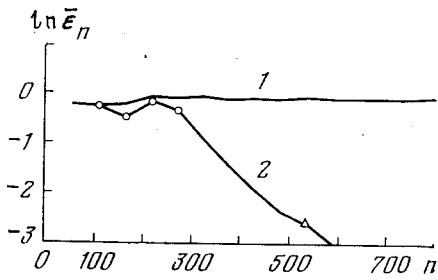
$$(4.2) \quad \bar{\varepsilon}_n < (1-\rho_1)\bar{\varepsilon}_{n-N_0}, \quad 0 < \rho_1 < 1.$$

Если неравенство (4.2) удовлетворяется, а также если n не кратно N_0 , никаких изменений в вычислительном алгоритме на последующих N_0 итерациях не производим, так что в этих случаях

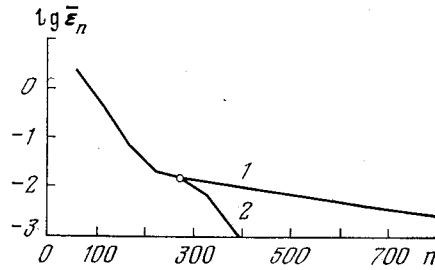
$$q_{n+1}^*=q_n^*, \quad q_{n+1}^\circ=q_n^\circ, \quad a_{n+1}=a_n, \quad b_{n+1}=b_n.$$

Если же (4.2) не выполняется, то, зная D , анализируем структуру итерационного процесса на полуинтервале $(n-N_0, n]$.

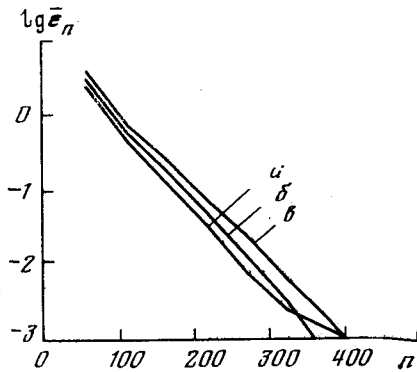
5. Если $D < \bar{D}$, то это означает, что параметры релаксации находятся между кривыми $\tilde{q}^*(Ra)$ и $\tilde{q}^*(Ra)$. Чтобы подавить высокочастотные ос-



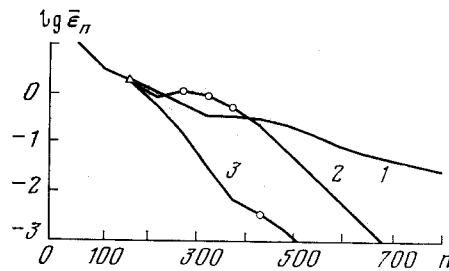
Фиг. 6. $q_1^* = 1$



Фиг. 7. $q_1^* = 0.125$



Фиг. 8. а — для $q_1^* = 0.1$, б — для 0.09, в — для 0.08



Фиг. 9. $q_1^* = 0.025$

цилляции и приблизить q^* и q^* к оптимальным значениям, уменьшаем q^* и, соответственно, увеличиваем q^* :

$$q_{n+1}^* = q_n^* - \rho_2 (q_n^* - a_n), \quad q_{n+1}^* = 2 - q_{n+1}^*, \quad 0 < \rho_2 < 1.$$

При этом с целью сужения области варьирования этих параметров полагаем для верхней границы

$$b_{n+1} = q_n^* \quad (a_{n+1} = a_n).$$

6. Соотношение $D > \bar{D}$ свидетельствует, что реализуется случай $0 < q^* < \tilde{q}^*$, $\tilde{q}^* < q^* < 2$. Соответственно корректируем параметры:

$$q_{n+1}^* = q_n^* + \rho_3 (b_n - q_n^*), \quad q_{n+1}^* = 2 - q_{n+1}^*, \quad 0 < \rho_3 < 1.$$

По тем же соображениям, что и ранее, подправляем нижнюю границу области изменения параметра q^* :

$$a_{n+1} = q_n^* \quad (b_{n+1} = b_n).$$

Через каждые N_0 итераций процедура повторяется. Таким образом происходит самонастраивание итерационного алгоритма на оптимальный режим сходимости.

Специальных исследований относительно выбора корректировочных коэффициентов ρ_1, ρ_2, ρ_3 не проводилось. Отметим лишь, что рост Ra требует их уменьшения. В ходе численных экспериментов они принимались равными друг другу. Хорошая сходимость при $Ra=10^5, 10^6, 10^7$ достигалась выбором $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0.6, 0.5, 0.2$, соответственно. При более низких значениях, например при $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0.1$, итерации также сходились во всех трех случаях, но медленнее.

Фиг. 6–9 иллюстрируют эффективность предложенного способа корректировки параметров релаксации в зависимости от начального приближения q_1^* (первая задача, $Ra=10^6$, $h=1/20$, $\rho_1=\rho_2=\rho_3=0.5$; 1 – без корректировки параметров релаксации, 2 и 3 – при включенном алгоритме стабилизации: 2 – для $a_1=0$, $b_1=1$, 3 – для $a_1=0$, $b_1=0.2$). Точки, соответствующие уменьшению q^* , отмечены кружками, увеличению q^* – треугольниками. Заметим, что даже в самом неблагоприятном случае $q_1^*=q_1^*=1$ алгоритм позволил стабилизировать процесс за число итераций, превосходящее минимальное значение менее чем в 2 раза.

Заключение

Чтобы выяснить степень общности полученных результатов, их пробовавали при иных входных данных разностной задачи, хотя эти исследования и не носили систематического и детального характера. На примере второй задачи при $Ra=10, 3.2 \cdot 10^4, 10^6$ и $h=1/20$ грубо оценивались оптимальные параметры релаксации для других разностных схем и граничных условий для вихря. Проверялись схемы монотонного типа: консервативные первого [1] и второго [6] порядков аппроксимации, схема третьего порядка [14], а также усовершенствованный вариант монотонной схемы четвертого порядка, описанной в [19]. Для вихря применялись граничные условия второго порядка точности Вудса и Кусковой и условие третьего порядка Кусковой – Чудова. Кроме нулевого распределения рассматривались и иные начальные состояния в итерационном процессе, а именно решения, соответствующие меньшим Ra . В качестве первого приближения $\{\tilde{q}_1^T, \tilde{q}_1^*, \tilde{q}_1^*\}$ в процедуре оптимизации задавались $\tilde{q}^T, \tilde{q}^*, \tilde{q}^*$ из табл. 1. Для первых двух чисел Рэлея погрешность δ была около 0.1, а для $Ra=10^6$ – примерно 0.02. Полученные таким путем $\tilde{q}^T, \tilde{q}^*, \tilde{q}^*$ во всех случаях совпали с приведенными в табл. 1, а период осцилляций $\bar{D}$ вполне описывался соотношением (4.1).

Полученные результаты были успешно опробованы при решении ряда новых задач [9–11, 20, 21]. Применялась консервативная монотонная схема второго порядка. В области низких и умеренных Ra расчеты проводились на равномерных сетках, в основном с шагом $1/20$, а параметры релаксации принимались всюду $q^T=q^*=1$, $q^*=1.5$, обеспечивая при этом хорошую скорость сходимости. В условиях высокоинтенсивной конвекции использовались также более точные сетки. Для получения стационарных решений при больших Ra применялся алгоритм стабилизации, описанный в § 4. Величина $\bar{D}$ задавалась соотношением (4.1) или по близкой формуле.

Структуру сходимости оказалось иногда лучше рассматривать на промежутке $N_0=[D]$, так как при $N_0=[D/2]$ итерационный процесс не всегда мог в достаточной степени развиваться. При этом достигалось установление итераций, которое не имело места при $q^T=q^*=q^{\circ}=1$. Как правило, процесс сходился за число итераций, соизмеримое с достигнутым на тестовых задачах. Если скорость сходимости была неудовлетворительной (а это случалось на сетках, отличных от рассмотренных при численном эксперименте), то повысить ее удавалось путем изменения (обычно в сторону увеличения) коэффициента k в формуле (4.1), но не более чем в 2 раза.

Следует отметить, что при достаточно больших Ra , соответствующих области ламинарного пограничного слоя, не приходилось сталкиваться с иной формой развития итераций, кроме как в виде осцилляций. Если рассматривать итерационный алгоритм как некоторую схему установления [17], то возникновение с ростом Ra колебаний в итерациях вполне может иметь физическую природу и вызываться приближающейся турбулизацией конвективного потока. Все это дает основания надеяться, что основные идеи предложенного способа стабилизации итераций будут продуктивны при решении многих задач конвекции в режиме ламинарного пограничного слоя.

Попутно оценивались более слабые, чем (2.1), условия сходимости, которые иногда применяются на практике: установление трех и четырех значащих цифр в числе Нуссельта. В результате стало возможным провести некоторое сравнение. Так, установление трех знаков в числе Нуссельта при решении первой тестовой задачи на сетке 21×21 при $Ra=5 \cdot 10^4$ достигается за 25–30 шагов по времени при временном шаге $\tau=0.002$ (которое близко к максимально допустимому), если применять неявную процедуру установления, предложенную в [22]. Как показано в [23], по устойчивости и экономичности метод превосходит другие эволюционные схемы, применяемые для решения задач конвекции. При этом на каждом временном слое уравнения температуры и вихря считаются по схеме продольно-поперечной прогонки, а уравнение Пуассона для функции тока — итерациями. Этот же вариант методом релаксации при $q^T=\tilde{q}^T$, $q^*=\tilde{q}^*$, $q^{\circ}=\tilde{q}^{\circ}$ просчитывается за 60–65 итераций. Однако ввиду примерно 6-кратной, если следовать [4], разницы во временной цене одной итерации получаем, что по общим затратам машинного времени метод релаксации почти в 3 раза экономичнее. Что же касается области высоких чисел Рэлея, то уже, например, при $Ra=10^6$ алгоритм [22] не дает установления даже при очень малых τ . Повышенные стабилизирующие свойства предложенного релаксационного метода решения стационарных задач конвекции обеспечиваются более гибкой, чем у схем установления, организацией вычислительного процесса.

Автор выражает глубокую благодарность Б. М. Берковскому за постановку задачи, Л. А. Чудову, В. И. Полежаеву, Х. Э. Калису, В. Н. Варапаеву за плодотворное обсуждение результатов, В. Л. Грязнову за методический материал, предоставленный для сравнения.

Поступила в редакцию 26.12.1978
Переработанный вариант 16.07.1979

Цитированная литература

1. А. Д. Госмен и др. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
2. Р. Е. Пау, К. Т. Карли, С. Л. Каррут. Численное решение задачи о свободной конвекции в цилиндрических каналах кольцевого сечения. Теплопередача, 1971, № 2, 78—87.
3. Б. М. Берковский, Л. П. Иванов. Пороговое возбуждение фотоабсорбционной конвекции. Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1971, № 5, 128—135.
4. Р. П. Федоренко. Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. Успехи матем. наук, 1973, 28, вып. 2 (170), 121—182.
5. L. Crawford, R. Lemlich. Natural convection in horizontal concentric cylindrical annuly. Industr. and Engng Chem. Fundamentals, 1962, 1, № 4, 260—264.
6. Б. М. Берковский, В. К. Полевиков. Влияние числа Прандтля на структуру и теплообмен при естественной конвекции. Инж.-физ. ж., 1973, 24, № 5, 842—849.
7. В. А. Гуцин, В. В. Щенников. Об одном численном методе решения уравнений Навье — Стокса. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 2, 512—520.
8. Р. В. Джонсон, А. М. Данак. Теплообмен при ламинарном обтекании прямоугольной полости при наличии инъекции жидкости. Теплопередача, 1976, № 2, 84—90.
9. В. К. Полевиков, В. Е. Фертман. Исследование теплообмена через горизонтальный кольцевой слой магнитной жидкости при охлаждении цилиндрических проводников с током. Магнитная гидродинамика, 1977, № 1, 15—21.
10. Е. Ф. Ноготов, В. К. Полевиков. Конвекция в вертикальном слое магнитной жидкости, находящемся в магнитном поле пластины с током. Магнитная гидродинамика, 1977, № 2, 28—34.
11. В. К. Полевиков. Некоторые вопросы численного исследования нелинейных задач тепловой конвекции методом сеток. Дисс. канд. физ.-матем. н., Минск, Ин-т матем. АН БССР, 1977.
12. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Е. Л. Тарунин. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1966, № 5, 56—62.
13. J. E. Fromm. A numerical method for computing the non-linear, time dependent, buoyant circulation of air in room. IBM J. Res. and Developm., 1971, 15, № 3, 451—464.
14. B. M. Berkovsky, V. K. Polevikov. Heat transfer at high-rate free convection. In «Heat Transfer 1974». Vol. 3. Tokyo, 1974, 85—89.
15. Б. М. Берковский, Е. Ф. Ноготов. Численное исследование свободной конвекции при нагреве сверху. Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа, 1970, № 2, 147—154.
16. А. А. Самарский. О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряженного эллиптического оператора. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, 5, № 3, 548—551.
17. А. А. Самарский. Теория разностных схем. М., «Наука», 1977.
18. В. К. Полевиков. Разностная схема четвертого порядка точности для расчета функции вихря на границе в задачах динамики жидкости. Докл. АН БССР, 1979, 23, № 10, 872—875.
19. B. M. Berkovsky, V. K. Polevikov. Numerical study of problems on high-intensive free convection. In «Heat Transfer and Turbulent Buoyant Convection». Washington, Hemisphere Publ., 1977, 443—455.
20. B. M. Berkovsky et al. Specific features of natural convection heat transfer in magnetic fluids. In «Heat Transfer 1978». Vol. 3. Washington, Hemisphere Publ., 1978, 147—151.
21. B. M. Berkovsky et al. Heat transfer across vertical ferrofluid layers. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1976, 19, № 9, 981—986.
22. В. Л. Грязнов, В. И. Полежаев. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции. Препринт Ин-та пробл. механ. АН СССР, 1974, № 40.