

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

(Труды VI Всесоюзного семинара по численным
методам механики вязкой жидкости).

Сборник статей под редакцией
к.ф.м.-н. Б.Г.Кузнецова

НОВОСИБИРСК 1978

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ВЫСОКОИНТЕНСИВНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

В.К.Полевиков

1. В работах [1-5] были построены и успешно реализованы на задачах высокоинтенсивной свободной конвекции схемы третьего и четвертого порядков точности с недивергентным разностным оператором монотонного типа, определенные на минимальном сеточном шаблоне "ящик". Применительно к стационарному уравнению конвекции

$$\sum_{\alpha=1}^2 \tilde{L}_{\alpha}^{(1,v)} u + f = 0, \quad (1)$$

где для дифференциальных операторов приняты обозначения

$$\tilde{L}_{\alpha}^{(k,v)} u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) - v_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}},$$

а коэффициенты $v_{\alpha} = v_{\alpha}(x)$, $f = f(x)$ вместе с решением $u = u(x)$ являются достаточно гладкими функциями по $x = (x_1, x_2)$, схема четвертого порядка, описанная в работе [5], имеет вид:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[\tilde{L}_{\alpha}^{(1,v)} y + \frac{1}{12} h_{\alpha}^2 (k'_{\alpha} \tilde{L}_{\alpha}^{(2,v)} y + \tilde{L}_{\alpha}^{(2,v)} y + \tilde{L}_{\alpha}^{(1,v)} \tilde{L}_{\alpha}^{(1,v)} y) \right] + f^* = 0. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{L}_{\alpha}^{(k,v)}$ - монотонный разностный оператор второго порядка аппроксимации, заимствованный из [6]; h_{α} - шаг регулярной сетки по координате x_{α} ; $k'_{\alpha} = m_{\alpha} + k_{\alpha}^* R$, $k_{\alpha}^* = |v| / h^2$,

$v_\alpha^* = \tilde{L}_\alpha^{(i,v)} v_\alpha + (k_\alpha^* - m_\alpha) v_\alpha$, $f^* = f + \frac{1}{12} \left[\sum_{\alpha=1}^2 h_\alpha^2 \tilde{L}_\alpha^{(i,v)} f + |h|^2 (1+R) f \right]$
 $m_\alpha = v_\alpha^2 - 2 \partial v_\alpha / \partial x_\alpha$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, R - параметр регуляризации. Если выполняются условия

$$\frac{h_\alpha}{h_p} \leq \sqrt{5} \approx 2,24, \quad R \geq |m_\alpha| + \frac{1}{8} x_\alpha v_\alpha^* |h|^2, \\ (\alpha = \beta, x_\alpha = 1/(1+z_\alpha+z_\alpha^2+z_\alpha^3), z_\alpha = h_\alpha |v_\alpha|/2), \quad (3)$$

то схема (2) удовлетворяет принципу максимума [6], т.е. становится монотонной.

2. В настоящем сообщении рассмотрим консервативную монотонную схему с погрешностью аппроксимации $O(h^4)$, которая несколько смягчает условия на гладкость коэффициентов дифференциального уравнения и, поэтому, более перспективна с точки зрения расчета высокоинтенсивных термоконвективных процессов.

Процедура ее построения состоит из двух основных этапов. На первом этапе аппроксимируем со вторым порядком точности исходное уравнение конвекции, записанное с учетом условия неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\operatorname{div} v = 0 \quad (4)$$

в дивергентном виде:

$$\sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha^{(i,v)} u + f = 0, \quad L_\alpha^{(i,v)} u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{L}_\alpha^{(i,v)} u, \quad \tilde{L}_\alpha^{(i,v)} u = k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - v_\alpha u. \quad (5)$$

Для этого используем консервативную монотонную схему второго порядка [7]:

$$\bar{v}_\alpha = (v_\alpha^{(i-1)} + v_\alpha)/2, \quad x_\alpha = 1/(1+z_\alpha+z_\alpha^2+z_\alpha^3), \quad z_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |v_\alpha|/k_\alpha, \quad (6)$$

(в обозначениях [6]), в которой положим

$$\bar{v}_\alpha = (v_\alpha^{(i-1)} + v_\alpha)/2, \quad x_\alpha = 1/(1+z_\alpha+z_\alpha^2+z_\alpha^3), \quad z_\alpha = \frac{1}{2} h_\alpha |v_\alpha|/k_\alpha. \quad (7)$$

Тогда путем разложений сеточных функций в ряды Тейлора в точках минимального сеточного шаблона получим соотношение между разностными и дифференциальными операторами:

$$L_\alpha^{(i,v)} u = \tilde{L}_\alpha^{(i,v)} u - \frac{1}{12} h_\alpha^2 A_\alpha u + O(h_\alpha^4), \quad A_\alpha u = -L_\alpha^{(i,v)} L_\alpha^{(i,v)} u + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(v_\alpha^2 - \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) u \right]. \quad (8)$$

На втором этапе построения аппроксимируем оператор $A_\alpha u$ со вторым порядком точности. С этой целью избавимся сначала от производных высоких порядков в (8), не поддавшись разностной аппроксимации на минимальном шаблоне, подставляя выражение для $L_\alpha^{(i,v)}$ из уравнения (5). Затем, чтобы навязать искомой схеме монотонные свойства, введем в формулу (8) некоторый положительный параметр регуляризации R . Таким образом, осуществляем преобразование:

$$\sum_{\alpha=1}^2 h_\alpha^2 A_\alpha u = \sum_{\alpha=1}^2 h_\alpha^2 \left\{ L_\alpha^{(i,v)} (L_\alpha^{(i,v)} u + f) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(v_\alpha^2 - \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_\alpha^2} + v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) u \right] \right\} + \\ - |h|^2 (1+R) \left(\sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha^{(i,v)} u + f \right) - \sum_{\alpha=1}^2 h_\alpha^2 (L_\alpha^{(i,v)})^2 u + \\ + L_\alpha^{(k^*,v^*)} u + L_\alpha^{(i,v)} L_\alpha^{(i,v)} u + |h|^2 \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha^{(i,v)} R + |h|^2 f', \quad (9)$$

где

$$k'_\alpha = m_\alpha + k_\alpha^* R, \quad v'_\alpha = k'_\alpha v_\alpha, \quad k_\alpha^* = |h|^2/h_\alpha^2,$$

$$v_\alpha^* = -L_\alpha^{(i,v)} v_\alpha - 3 v_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} - v'_\alpha + k_\alpha^* L_\alpha^{(i,v)} R,$$

$$f' = (1+R)f + \sum_{\alpha=1}^2 (k_\alpha^* L_\alpha^{(i,v)} f), \quad m_\alpha = -L_\alpha^{(i,v)} v_\alpha, \quad \alpha = \beta.$$

Для ясности отметим, что подчеркнутое слагаемое в (9) на реше-

нии $\omega = \omega(\infty)$ тождественно равно нулю. Регуляризатор R будем считать достаточно большим, так чтобы выполнялись условия $k_\alpha > 0$.

Тогда с учетом уравнения неразрывности (4) искомую монотонную схему четвертого порядка по $|h|$ можно записать в виде:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[\Lambda_\alpha^{(i,v)} y + \frac{1}{12} h_\alpha^2 (\Lambda_\alpha^{(k',v)} y + \Lambda_\alpha^{(k'',v'')} y + \Lambda_\alpha^{(i,v)} \Lambda_\alpha^{(i,v)} y) \right] + q^* y + f^* = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$q^* = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ (\bar{v}_\alpha)_{x_\alpha} + \frac{1}{12} h_\alpha^2 [(\bar{v}_\alpha' + \bar{v}_\alpha'')_{x_\alpha} + \Lambda_\alpha^{(i,v)} (\bar{v}_\alpha)_{x_\alpha} - k_\alpha^* \Lambda_\alpha^{(i,-v)} R] \right\}, \quad f^* = f + \frac{1}{12} |h|^2 f'.$$

Используя асимптотические разложения, можно показать, что при условии (4) коэффициент q^* есть величина порядка $O(|h|^4)$. Так что слагаемое $q^* y$ не ухудшает аппроксимационные свойства схемы (10). Однако благодаря его введению, схема (10) стала консервативной. Путем анализа коэффициентов нетрудно получить условия, при которых она удовлетворяет принципу максимума [6]. Эти условия, как выяснилось, определяются неравенствами (3), только выражение для m_α задается из (9).

3. На минимальном шаблоне построим устойчивые разностные формулы четвертого порядка точности для нахождения граничных значений вихря. Рассмотрим стационарные уравнения вихря φ и функции тока ψ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + f, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = -\varphi. \quad (12)$$

Будем считать, что один из участков границы совпадает с осью x_1 и на нем имеют место условия прилипания:

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = 0. \quad (13)$$

Считая для определенности расчетную область примыкающей к рассматриваемому участку границы сверху и принимая в расчет (13), разложим функцию тока в ряд Тейлора в приграничной точке:

$$\varphi^{(1,2)} = \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{1}{6} h_2^3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3} + \frac{1}{24} h_2^4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} + \frac{1}{120} h_2^5 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_2^5} + O(h_2^6). \quad (14)$$

Следуя методике [8], заменим в (14) вторую, третью и четвертую производные от φ их точными дифференциальными выражениями через завихренность φ , имеющими место на границе:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = -\varphi, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - f. \quad (15)$$

Если оставить в разложении (14) только члены не выше четвертого порядка малости, то с учетом (15) получим приближенное граничное условие третьего порядка, предложенное в работе [8] и с успехом примененное автором при реализации схем $O(h_2^5)$ в задачах высокоинтенсивной свободной конвекции [1-3].

Удержим в разложении (14) дополнительно член $O(h_2^5)$ и заменим его, затем, соотношением более удобным для последующей аппроксимации на минимальном шаблоне. Для этого выпишем при условии (13) некоторые частные производные от уравнений (11) и (12) на границе $x_2 = 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_1^3 \partial x_2^2} = -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_2^5} = - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3}. \quad (18)$$

Кроме того, из разложения (14) получаем при $x_2 = 0$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{2}{h_2} \varphi^{(1_2)} + O(h_2). \quad (19)$$

Рассматривая совместно уравнения (16)–(19), находим выражение для пятой производной:

$$\frac{\partial^5 \varphi}{\partial x_2^5} = 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{2}{h_2^2} \varphi^{(1_2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + O(h_2). \quad (20)$$

Как видим, для вычисления граничных значений вихря с погрешностью $O(|h|^4)$ по формуле (14) с учетом (15) и (20) достаточно производную $\partial \varphi / \partial x_2$ аппроксимировать с точностью $O(|h|^3)$, производную $\partial^2 \varphi / \partial x_2^2$ – с погрешностью $O(|h|^2)$, а все производные из (20) – с первым порядком точности. С помощью асимптотических разложений правомерно записать:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \varphi_{x_2} - \frac{1}{2} h_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{6} h_2^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2^3} + O(h_2^3). \quad (21)$$

Вид производной $\partial^3 \varphi / \partial x_2^3$ определяем из формул (16) и (19). С целью повышения устойчивости искомого разностного граничного условия член $\varphi^{(1_2)} \partial \varphi / \partial x_1$ аппроксимируем по монотонной схеме:

$$\varphi^{(1_2)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = (\varphi^{(1_2)})^+ \varphi_{x_1} + (\varphi^{(1_2)})^- \varphi_{\bar{x}_1} + O(|h|). \quad (22)$$

Если принять во внимание (14)–(16), (19)–(22), то, очевидно, справедливо следующее разностное соотношение:

$$\varphi^{(1_2)} = -\frac{1}{2} h_2^2 \varphi - \frac{1}{6} h_2^3 \varphi_{x_2} - \frac{1}{24} h_2^4 f - \frac{1}{360} h_2^5 \left\{ 4 \varphi_{\bar{x}_1 x_1 x_2} - \right.$$

$$- \frac{14}{h_2^2} [(\varphi^{(1_2)})^+ \varphi_{x_1} + (\varphi^{(1_2)})^- \varphi_{\bar{x}_1}] + 7 f_{x_2} \Big\} + O(|h|^6). \quad (23)$$

Отсюда получаем требуемую приближенную формулу четвертого порядка точности для завихренности на границе $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi = & \left\{ - \left(15 - 2 \frac{h_2^2}{h_1^2} \right) \varphi^{(1_2)} - \frac{h_2^2}{h_1^2} (\varphi^{(1_1, +1_2)} + \varphi^{(1_1, -1_2)}) + \right. \\ & - \left[\frac{h_2^2}{h_1^2} + \frac{7}{2} \frac{h_2}{h_1} (\varphi^{(1_2)})^+ \right] \varphi^{(1_1)} + \\ & + \left[\frac{h_2^2}{h_1^2} - \frac{7}{2} \frac{h_2}{h_1} (\varphi^{(1_2)})^- \right] \varphi^{(1_1)} - \frac{90}{h_2^2} \varphi^{(1_2)} - \\ & \left. - 2 h_2^2 f - \frac{7}{4} h_2^2 f^{(1_2)} \right\} / \left(30 + 2 \frac{h_2^2}{h_1^2} + \frac{7}{2} \frac{h_2}{h_1} |\varphi^{(1_2)}| \right). \quad (24) \end{aligned}$$

Для решения построенных разностных краевых задач конвекции целесообразно, по-видимому, пользоваться итерационными методами, например, методом Зейделя. Тривиальный анализ коэффициентов (24) показывает, что достаточные условия его сходимости [9] выполняются, если во внутренних узлах применяются монотонные схемы, а для краевого условия (24) имеет место оценка:

$$\frac{h_{\alpha}}{h_{\beta}} < \frac{\sqrt{45}}{2} \approx 3,35, \quad \alpha \neq \beta. \quad (25)$$

4. На двух модельных задачах: 1) о свободной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в квадратной области при синусоидальном нагреве сверху [1–3, 10] и 2) о течении Куэтта со вдувом массы через стенки [11] – проводилось сравнение схемы повышенного порядка точности (2) с наиболее характерными из известных схемами монотонного типа.

Формулы для расчета краевых значений завихренности и, во второй задаче, функции тока на свободной границе строились с погрешностью $O(|h|^4)$ по описанной выше методике. Вычисления производились с помощью итерационного метода Зейделя, модифицированного путем введения релаксационных параметров, на рав-

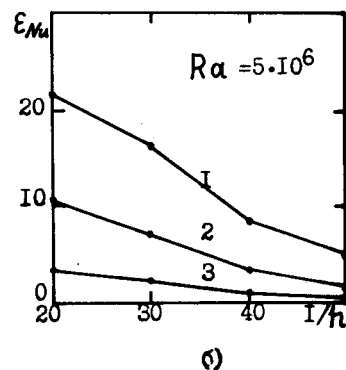
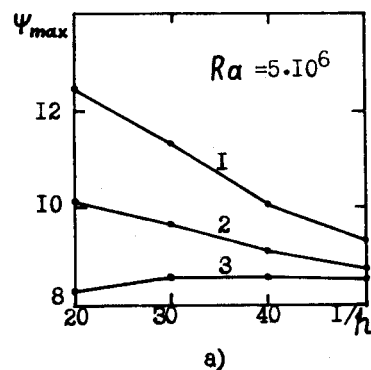


Рис.1.

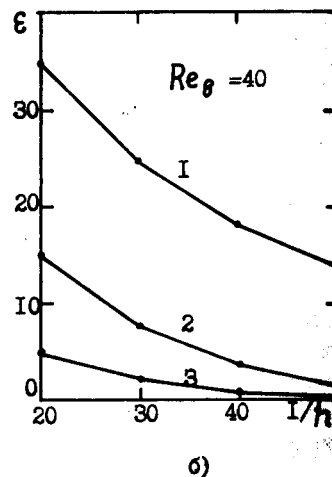
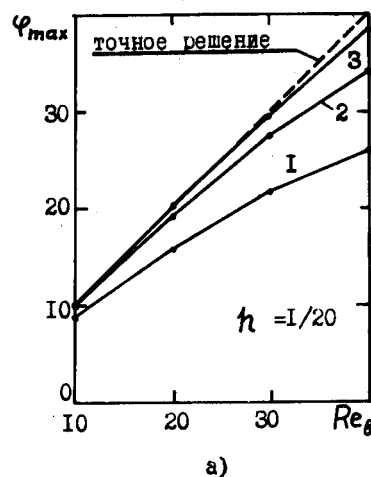


Рис.2.

номерных сетках с шагом $h = 1/20, 1/30, 1/40, 1/50$.

В задаче естественной конвекции точность численных результатов оценивалась в процентах относительной величины невязки в интегральных числах Нуссельта δ_{Nu} , а в задаче Куэтта, допускающей точное аналитическое решение, — максимальной относительной погрешностью δ (в процентах).

На рис. 1 и рис. 2 (где Ra — число Рэлея, Re_δ — число Рейнольдса по скорости вдува, кривые 1 получены консервативной монотонной схемой первого порядка [11], кривые 2 — консервативной монотонной схемой второго порядка [7], кривые 3 — с помощью четвертого порядка (2)) относятся, соответственно, к первой и второй тестовым задачам и иллюстрируют влияние размерности сетки и порядка аппроксимации схемы на точность численных результатов (рис. 1-2б) и максимальное значение функции тока ψ_{max} (рис. 1а) в области больших критериальных чисел, а также зависимость максимальной величины завихренности φ_{max} от аппроксимационных свойств схемы при различных Re_δ (рис. 2а). Как видим, при небольших режимных параметрах все схемы дают на разумных сетках достаточно точные результаты. Однако, в диапазоне высоких Ra и Re_δ наиболее эффективны схемы повышенного порядка точности, позволяющие значительно экономить не только оперативную память ЭВМ, но, зачастую, и машинное время.

Автор признателен Е.М.Берковскому, под руководством которого была выполнена работа, Л.А.Чудову, В.И.Полежаеву и участникам руководимого ими семинара за детальное и плодотворное обсуждение приведенных результатов.

1. В.М.Берковский, В.К.Полевиков. Heat Transfer at High-Rate Free Convection. Proc. 5th Internat. Heat Transfer Conf., Tokyo, v.3, 85-89, 1974.
2. Берковский Е.М., Полевиков В.К. Теплообмен в условиях высокоинтенсивной свободной конвекции. Сб. "Теплообмен, 1974. Советские исследования", М., Наука, 1975, 169-175.
3. Полевиков В.К. Численные эксперименты с монотонными конечно-разностными схемами для уравнений естественной конвекции.

- Сб. "Совр. проблемы тепловой гравитационной конвекции", Минск, ИТМО АН БССР, 1974, 89-95.
4. Полевиков В.К. О построении разностной схемы повышенного порядка точности для задач высокоинтенсивного тепло-массообмена. Там же, 84-88.
 5. B.M.Berkovsky, V.K.Polevnikov. Numerical Study of Problems on High-Intensive Free Convection. Proc.Internat.Turbulent Buoyant Convecyion Seminar, Yugoslavia, Dubrovnic, 29 August - 4 September 1976, 443-455.
 6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.
 7. Берковский Б.М., Полевиков В.К. Влияние числа Прандтля на структуру и теплообмен при естественной конвекции. ИФЖ, 24, № 5, 1973, 842-849.
 8. Кускова Т.В., Чудов Л.А. О приближенных граничных условиях для вихря при расчете течений вязкой несжимаемой жидкости. Сб. "Вычислительные методы и программирование", М., МГУ, вып. II, 1968, 27-31.
 9. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., Мир, 1969.
 10. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Численное исследование свободной конвекции при нагреве сверху. МЖТ, № 2, 1970, 147-154.
 11. Госмен А.Д., Пан В.М., Ранчел А.К., Сполдинг Д.Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., Мир, 1972.