ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 432, № 3, с. 295–298

МАТЕМАТИКА

УДК 514.765

ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ И ЭРМИТОВЫ *f*-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ *k*-СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2010 г. В. В. Балащенко, А. С. Самсонов

Представлено академиком А.Т. Фоменко 16.12.2009 г.

Поступило 17.12.2009 г.

Почти-эрмитовы структуры входят в число важнейших дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях, при этом основные классы таких структур (эрмитовы, келеровы, приближенно келеровы и др.) обеспечены инвариантными реализациями. Иными словами, имеется обширный ресурс однородных многообразий G/H, обладающих инвариантными относительно группы Ли G почти-эрмитовыми структурами того или иного класса. Например, классическим фактом является то, что эрмитова структура на эрмитовых симметрических пространствах является келеровой. Что касается инвариантных приближенно келеровых структур, то они реализуются на естественно редуктивных 3-симметрических пространствах, которые всегда наделены канонической почти-комплексной структурой J (см. [1–3]).

Метрические f-структуры классического типа ($f^3 + f = 0$ [4]), содержащие почти-эрмитовы и метрические почти-контактные структуры, стали одним из основных объектов в широкой концепции обобщенной эрмитовой геометрии, развиваемой с середины 1980-х годов (см., например, [5]). Здесь также возникли естественным образом основные классы метрических f-структур (эрмитовы, келеровы, киллинговы, приближенно келеровы f-структуры и др.), которые, однако, длительное время не были обеспечены собственными инвариантными реализациями. Ситуация изменилась после обнаружения в [6] богатого запаса канонических f-структур на регулярных Ф-пространствах, в частности на однородных k-симметрических пространствах. Оказалось, например, что обнаруженная каноническая f-структура на естественно редуктивных 4-симметрических пространствах является приближенно келеровой и эрмитовой f-структурой [7, 8]. Такими же свойствами обладают обе канонические f-структуры f_1 и f_2 на однородных 5-симметрических пространствах [7–9].

Белорусский государственный университет, Минск

В данном сообщении показано, что все базовые канонические f-структуры на естественно редуктивных k-симметрических пространствах ($k \geq 3$) являются приближенно келеровыми f-структурами. Указаны также критерии приближенно келеровости для канонических f-структур вида сумма/разность двух базовых f-структур. Выделены те базовые f-структуры, которые являются еще и эрмитовыми f-структурами; для остальных указаны критерии эрмитовости. Полученные результаты носят общий характер и позволяют получить в качестве следствий отмеченные выше и некоторые другие факты из предшествующих работ. В качестве примера приведена детализация результатов для канонических f-структур на однородных 6-симметрических пространствах.

1. ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ И ЭРМИТОВЫ *f*-СТРУКТУРЫ

Напомним, что f-структура на гладком многообразии M порождает два взаимно дополнительных распределения $\mathfrak{L} = \mathrm{Im} f$ и $\mathfrak{M} = \mathrm{Ker} f$, размерности которых называются рангом и дефектом f-структуры соответственно. В частных случаях дефекта 0 и 1 приходим к почти-комплексной и почти-контактной структурам соответственно. $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ называют первым и вторым фундаментальными распределениями f-структуры.

Если $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – (псевдо)риманово многообразие, то f-структура на нем называется метрической, если $\langle fX, Y \rangle + \langle X, fY \rangle = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, где $\mathfrak{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M. Для метрической f-структуры распределения $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ взаимно ортогональны. Частный случай дефекта 0 для метрических f-структур приводит к почти-эрмитовым структурам.

Фундаментальная роль в геометрии метрических f-структур принадлежит композиционному тензору T типа (2, 1), который позволяет ввести структуру присоединенной Q-алгебры в $\mathfrak{X}(M)$ посредством формулы $X * Y = T(X, Y)$ [5, 10]. Это дает возможность определить некоторые классы метрических f-структур в терминах свойств этой

Q-алгебры. Заметим также, что вид тензора T хорошо известен [5, 10]:

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y),$$

где ∇ – связность Леви-Чивиты (псевдо)риманова многообразия (M, g), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Укажем здесь лишь некоторые важнейшие классы метрических f-структур. Метрическая f-структура называется приближенно келеровой f-структурой (короче, NKf-структурой, nearly Kähler f-structure), если $\nabla_{fX}(f)fX = 0$ для всех $X \in \mathfrak{X}(M)$ [7]. Если присоединенная Q-алгебра абелева (т.е. $T(X, Y) = 0$), то метрическая f-структура называется эрмитовой f-структурой (короче, Hf-структурой, Hermitian f-structure) [5]. Классы NKf-структур и Hf-структур будем обозначать через **NKf** и **Hf** соответственно. Заметим также, что в частном случае f-структур дефекта 0 классы **NKf** и **Hf** дают хорошо известные классы почти-эрмитовых структур – приближенно келеровы **NK** и эрмитовы **H** (см., например, [10]).

2. ИНВАРИАНТНЫЕ f-СТРУКТУРЫ НА ЕСТЕСТВЕННО РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $(G/H, g, f)$ – однородное редуктивное пространство группы Ли G с инвариантной (псевдо)римановой метрикой g и инвариантной метрической f-структурой, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Всюду далее будем обозначать одинаковыми символами инвариантные структуры на G/H и их значения в точке $o = H$. Задание метрической f-структуры порождает ортогональное разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \mathrm{Im} f$ и $\mathfrak{m}_2 = \mathrm{Ker} f$ определяют соответственно 1-е и 2-е фундаментальные распределения для f. Напомним, что $(G/H, g)$ называется естественно редуктивным, если $g([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = g(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}})$ для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения.

Приведем два утверждения, необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Теорема 1 [11]. *Инвариантная метрическая f-структура на естественно редуктивном пространстве $(G/H, g)$ является приближенно келеровой f-структурой тогда и только тогда, когда для всех $X \in \mathfrak{m}$ выполняется условие $[fX, f^2X] \in \mathfrak{h}$.*

Теорема 2 [12]. *Инвариантная NKf-структура на естественно редуктивном пространстве $(G/H, g)$ является эрмитовой f-структурой тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$.*

3. КАНОНИЧЕСКИЕ f-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть далее G/H – однородное Ф-пространство, определяемое автоморфизмом Φ группы Ли G, $\varphi = d\Phi_e$ – соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. G/H называется регулярным Ф-пространством [13, 6], если $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$, где $A = \varphi - \mathrm{id}$. Указанное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ инвариантно относительно φ и является ее каноническим редуктивным разложением [13]. Обозначим через θ сужение φ на $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$. Напомним еще, что все однородные Ф-пространства порядка k ($\Phi^k = \mathrm{id}$) регулярны [13]. Такие пространства иначе называют однородными k-симметрическими пространствами [14].

Инвариантная аффинорная структура F на регулярном Ф-пространстве G/H называется канонической, если ее значение в точке o является полиномом от θ: $F = F(\theta)$ [6]. Все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на G/H. Алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ содержит структуры классического типа (почти-произведения, почти-комплексные, f-структуры), полное описание которых получено в [6]. В частности, для однородных Ф-пространств порядка k получены точные вычислительные формулы. Приведем здесь формулы для канонических f-структур:

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi mj}{k}\right)(\theta^m - \theta^{k-m}),$$

где

$$u = \begin{cases} n, & \text{если} \quad k = 2n+1, \\ n-1, & \text{если} \quad k = 2n, \end{cases}$$

а $\zeta_j \in \{-1, 0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, u$, причем среди чисел ζ_j есть отличные от нуля. Еще отметим, что канонические f-структуры f_j, определяемые наборами $(\zeta_1, \ldots, \zeta_j, \zeta_u)$, в которых $\zeta_j = 1$, а остальные числа равны нулю, называются базовыми каноническими f-структурами. Детализация формул для классических канонических структур приведена в [6] для малых порядков $k = 3, 4, 5$. При этом для $k = 3$ приходим к уже упоминавшейся канонической почти-комплексной структуре $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2)$ [1], для $k = 4$ имеем структуру $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$. Не приводя формул для $k = 5$ (см. [6]), отметим, что две из канонических f-структур здесь являются базовыми, а две другие – почти комплексными.

Будем предполагать далее, что на однородном Ф-пространстве G/H порядка k задана инвариантная (псевдо)риманова метрика, определяемая симметрической билинейной формой $g = \langle\cdot, \cdot\rangle$ на

$\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$, инвариантной относительно $\mathrm{Ad}(H)$ и θ. Известно, что относительно такой метрики все канонические f-структуры на $(G/H, g)$ являются метрическими f-структурами. В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является так называемая стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли g. Отметим еще, что такая метрика на любом регулярном Ф-пространстве является естественно редуктивной относительно канонического редуктивного разложения [13].

4. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫ И ЭРМИТОВЫ f-СТРУКТУРЫ

Рассмотрим далее однородное Ф-пространство G/H произвольного порядка k ($k \geq 2$). Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ – соответствующие алгебры Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение. Впоследствии будем использовать следующие обозначения: $s = \left[\frac{k-1}{2}\right]$ (целая часть), $u = s$ (при нечетном k), $u = s + 1$ (при четном k). Запишем следующее φ-инвариантное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_u, \quad (1)$$

где подпространства $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_u$ соответствуют парам сопряженных корней степени k из 1 из спектра оператора θ (некоторые из подпространств могут быть нулевыми); в частности, подпространство $\mathfrak{m}_{s+1}$ соответствует корню -1.

Укажем коммутаторные соотношения для введенных подпространств.

Т е о р е м а 3. *Пусть G/H – однородное Ф-пространство порядка k ($k \geq 2$), $\mathfrak{m}$ – соответствующее каноническое редуктивное дополнение с разложением* (1). *Пусть $i, j = 0, 1, \ldots, u$, $i \geq j$, при этом подпространство $\mathfrak{m}_{i+j}$ обозначает $\mathfrak{m}_{k-(i+j)}$, если $i + j > u$.*

Тогда справедливы следующие коммутаторные соотношения:

$$[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i+j} + \mathfrak{m}_{i-j}.$$

Отметим, что при $k = 2$ теорема 3 дает хорошо известные коммутаторные соотношения для симметрических пространств: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$. Заметим также, что соотношения аналогичного характера независимо и в ином виде получены в работе [15].

Перейдем теперь к рассмотрению канонических f-структур на однородных Ф-пространствах G/H порядка k. Из способа построения этих структур (см. [6]) следует, что любая из них на подпространстве $\mathfrak{m}_{s+1}$ (которое возможно лишь при четном k) тривиальна. Будем обозначать через f_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, базовую каноническую f-структуру, образом которой является подпространство $\mathfrak{m}_i$.

С использованием теорем 1, 3 и ряда дополнительных соотношений доказана

Т е о р е м а 4. *Пусть $(G/H, g)$ – однородное Ф-пространство порядка k с естественно редуктивной метрикой g.*

Тогда любая каноническая базовая f-структура f_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, на G/H является приближенно келеровой f-структурой.

Заметим, что эта теорема обобщает известные результаты о принадлежности канонических базовых f-структур классу $\mathbf{NKf}$ для порядков $k = 3, 4, 5$ (см. [3, 7, 11]).

Для суммы и разности канонических базовых f-структур получена

Т е о р е м а 5. *Пусть $(G/H, g)$ – естественно редуктивное однородное Ф –пространство порядка k. Пусть далее f_i, f_j – канонические базовые f-структуры на G/H, $i, j = 1, 2, \ldots, s$, $i > j$, $\mathfrak{m}_i$, $\mathfrak{m}_j$ – соответствующие подпространства из разложения* (1), *$\mathfrak{m}_{i+j}$ обозначает $\mathfrak{m}_{k-(i+j)}$, если $i + j > u$. В этом случае имеют место критерии*

$$f_i \pm f_j \in \mathbf{NKf} \Leftrightarrow [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i \pm j}.$$

Перейдем теперь к исследованию принадлежности канонических f-структур классу $\mathbf{Hf}$. Применением теорем 2–4 для канонических базовых f-структур доказана следующая

Т е о р е м а 6. *Пусть $M = G/H$ – однородное Ф-пространство порядка k с естественно редуктивной метрикой.*

Тогда для любой канонической базовой f-структуры f_i на M справедливы следующие утверждения:

1) *если $3i \neq k$, то f_i принадлежит классу* $\mathbf{Hf}$;

2) *если $3i = k$, то $f_i \in \mathbf{Hf} \Leftrightarrow [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h}$.*

5. КАНОНИЧЕСКИЕ f-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ 6-СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Мы уже отметили, что из доказанных теорем в качестве следствий можно получить ряд известных результатов для порядков $k = 3, 4, 5$. Поэтому применим полученные результаты для случая $k = 6$.

Используя общую формулу для канонических f-структур [6], запишем формулы для всех канонических f-структур (с точностью до знака) в случае однородных Ф-пространств порядка 6:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5), \quad f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5),$$

$$f_3 = f_1 + f_2, \quad f_4 = f_1 - f_2.$$

Отметим, что структуры f_1 и f_2 являются базовыми, а разложение (1) канонического редуктивного дополнения $\mathfrak{m}$ здесь имеет вид

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3.$$

Заметим также, что образом структур f_3 и f_4 является подпространство $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$.

Детализируя полученные утверждения для данного случая, приходим к следующему результату:

Теорема 7. *Пусть* $(G/H, g)$ *– естественно редуктивное однородное* Φ*-пространство порядка* 6. *Тогда*:

1) *канонические структуры* f_1 *и* f_2 *являются* NKf*-структурами*;

2) *каноническая структура* $f_3 = f_1 + f_2$ *является* NKf*-структурой тогда и только тогда*, *когда* $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_3$;

3) *каноническая структура* $f_4 = f_1 - f_2$ *является* NKf*-структурой тогда и только тогда*, *когда* $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{m}_1$;

4) *каноническая структура* f_1 *является эрмитовой f-структурой*;

5) *каноническая структура* f_2 *принадлежит классу* **Hf** *тогда и только тогда*, *когда выполняется условие* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2] \subset \mathfrak{h}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов Н.А.*// Изв. вузов. Математика. 1967. № 12. С. 65–74.
2. *Wolf J., Gray A.* // J. Different. Geom. 1968. V. 2. № 1/2. P. 77–159.
3. *Gray A.* // J. Different. Geom. 1972. V. 7. № 3/4. P. 343–369.
4. *Яно К., Кон М. CR*-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М.: Наука, 1990. 192 с.
5. *Кириченко В.Ф.* В кн.: Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 18. С. 25–71.
6. *Балащенко В.В., Степанов Н.А.* // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
7. *Балащенко В.В.* // ДАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 439–441.
8. *Балащенко В.В.* // УМН. 2001. Т. 56. № 3. С. 159–160.
9. *Чурбанов Ю.Д.* // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 70–81.
10. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003. 495 с.
11. *Balashchenko V.V.* // Contemp. Math. 2001. V. 288. P. 263–267.
12. *Балащенко В.В.* // Изв. вузов. Математика. 2008. № 4. С. 3–15.
13. *Степанов Н.А.* // Изв. вузов. Математика. 1967. № 3. С. 88–95.
14. *Ковальский О.* Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984. 240 с.
15. *Чурбанов Ю.Д.* // Изв. вузов. Математика. 2008. № 8. С.43–57.