[4] *Киш, О.* О некоторых интерполяционных процессах С.Н. Бернштейна / О. Киш // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. – 1973. – Т. 24. – С. 353–361.

Ляликов Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь, alyalikov@tut.by.

УДК 517.5

Т.С. Мардвилко

О значении постоянных в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций

Пусть $\mathbf{a}_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – некоторый набор n комплексных чисел, лежащих в круге $D = \{z : |z| < 1\}$. Введем произведение Бляшке

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}.$$

Границу круга D обозначим через T. Будем рассматривать рациональные функции степени $\leq n$ вида

$$r_n(z) = \frac{\sigma_n z^n + \sigma_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \sigma_0}{(1 - \bar{a}_1 z)(1 - \bar{a}_2 z) \ldots (1 - \bar{a}_n z)}. \qquad (1)$$

А.А. Пекарский [1], [2] (см. также [3]) получил оценки (2), (3), приведенные ниже, для высших производных рациональных функций вида (1). Для $s \geq 2$

$$|r_n^{(s)}(z)| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{l(s)n} \left(\frac{1 - |a_k|^2}{|1 - \bar{a}_k z|} \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{|1 - \bar{a}_k z|} \right\}^s \|r_n\|_{C(T)}, \quad z \in T, \qquad (2)$$

где $l(s) \geq 2$ – некоторое натуральное число, а $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{l(s)}$ – принадлежат D и зависят от $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$\|r_n^{(s)}\|_{L_{1/s}(T)} = c(s) \cdot n^s \cdot \|r_n\|_{C(T)}, \quad s \geq 2, \qquad (3)$$

где $c(s) > 0$ и зависит лишь от s.

Нами уточнены множители, стоящие перед $\|r_n\|_{C(T)}$ в неравенствах (2) и (3). Введем следующие функции $\Phi(z, \mathbf{a}_n, s)$ и $\Psi(n, s)$:

$$\Phi(z, \mathbf{a}_n, s) = \sup \frac{|r_n^{(s)}(z)|}{\|r_n\|_{C(T)}}, \quad z \in T,$$

где sup берется по всем рациональным функциям $r_n(z) \not\equiv 0$ вида (1);

$$\Psi(n, s) = \sup \frac{\|r_n^{(s)}\|_{L_{1/s}(T)}}{\|r_n\|_{C(T)}},$$

здесь sup берется по всем рациональным функциям $r_n(z) \not\equiv 0$ вида (1) и по всем наборам α_n. Для простоты записи положим

$$\lambda(\alpha) = 2^\alpha \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)}, \quad \alpha > 0,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера, и

$$\Delta_{n,\,\alpha}(z) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - |a_k|^2}{|1 - \bar{a}_k z|} \right)^\alpha \cdot \frac{1}{|1 - \bar{a}_k z|}, \quad \alpha > 0.$$

Теорема 1. *Если $s \geq 3$ – нечетное, то*

$$\Phi(z, \mathbf{a}_n, s) \leq s! \cdot (s+1)^s \left(\Delta_{n,1/s}(z) + 1\right)^s, \quad z \in T. \tag{4}$$

Если $s \geq 2$ – четное, то

$$\Phi(z, \mathbf{a}_n, s) \leq \sqrt[3]{2} \cdot s! \cdot (s+2)^s \left(\Delta_{n,1/(s+1)}(z) + 1\right)^s, \quad z \in T. \tag{5}$$

Теорема 2. *Если $s \geq 3$ – нечетное, то*

$$s! \lambda^s(1/s) \cdot n^s \leq \Psi(n, s) \leq (s+1)^s s! \lambda^s(1/s) \cdot (n+1)^s. \tag{6}$$

Если $s \geq 2$ – четное, то

$$s! \lambda^s(1/s) \cdot n^s \leq \Psi(n, s) \leq (s+2)^s s! \lambda^s(1/(s+1)) \cdot (n+1)^s. \tag{7}$$

Замечание. Аналоги оценок (2) и (3) для $s = 1$ получены ранее соответственно В.Н. Русаком и Е.П. Долженко. Эти результаты окончательные в смысле точности входящих в них постоянных.

Аналогичные результаты получены нами и для полуплоскости.

Список литературы

[1] *Пекарский, А.А.* Оценки высших производных рациональных функций и их приложения / А.А. Пекарский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 5. – С. 21–29.

[2] *Пекарский, А.А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (126). – № 4 (8). – С. 571–588.

[3] *Lorenz, G.G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G.G. Lorenz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Мардвилко Татьяна Сергеевна, Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка, Минск, Республика Беларусь, `mardvilko@mail.ru`.

УДК 517.53

А.А. Пекарский

Рациональная аппроксимация степенной функции в области с нулевым внешним углом

Для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ будем рассматривать функцию $f_\alpha(z) = z^\alpha$, аналитическую в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и удовлетворяющую условию $f_\alpha(x) > 0$ для $x \in (0, +\infty)$. Наилучшие рациональные приближения f_α на отрезке $[0, 1]$ изучались (см., например, [1]) Ньюменом, А.А. Гончаром, А.П. Булановым, Н.С. Вячеславовым, Андерссеном, Шталем и другими авторами.

Здесь мы будем рассматривать наилучшие приближения f_α в области с нулевым внешним углом в начале координат. Именно для $\gamma > 1$ в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим область

$$G_\gamma = \{x + iy : x^2 + y^2 < 1 \text{ и } |y| > |x| \text{ при } x \le 0\}.$$

Через $\overline{G}_\gamma$ обозначим замыкание области G_γ; $\mathcal{R}_n$ – множество рациональных функций степени не выше $n, n = 0, 1, \ldots$ Введем

$$R_n(f_\alpha)_{C_A(\overline{G}_\gamma)} = \inf_{r_n \in \mathcal{R}_n} \max_{z \in \overline{G}_\gamma} |f_\alpha(z) - r_n(z)|$$