Забрейко Пётр Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, zabreiko@mail.ru.

Таныгина Анастасия Николаевна, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, anast-minsk@mail.ru.

УДК 517.5

И.А. Иванишко, В.Г. Кротов

Теоремы типа Реллиха—Кондрашова на метрических пространствах с мерой

Пусть X — ограниченное метрическое пространство с регулярной борелевской мерой μ, которая связана с метрикой d условием удвоения порядка $\gamma > 0$:

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, x \in X,\ 0 < r \le s \qquad \mu B(x,s) \le c s^{\gamma} r^{-\gamma} \mu B(x,r)$$

Здесь $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ — шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$.

Пусть еще Ω класс возрастающих функций $\eta : (0,1] \to (0,1]$, для которых $\eta(+0) = 0$ и $\eta(r) r^{-a}$ убывает при некотором $a > 0$. Для $\eta \in \Omega$ определим максимальный оператор

$$\mathcal{N}_\eta f(x) = \sup_{B(y,r) \ni x} \frac{1}{\eta(r)} \cdot \frac{1}{\mu(B(y,r))} \int\limits_{B(y,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y), \qquad (1)$$

здесь sup берется по всем шарам $B(y,r)$, содержащим точку $x \in X$.

Рассмотрим классы Кальдерона–Коляды

$$C^p_\eta(X) = \{f \in L^p(X) : \|f\|_{C^p_\eta} = \|f\|_p + \|\mathcal{N}_\eta f\|_p < \infty\}.$$

Историю таких классов см. в [3], где имеются также различные описания этих пространств.

Следующее утверждение показывает, что с помощью (1) можно дать классификацию всех функций из $L^p(X)$.

Теорема 1. *Пусть $p > 1$ и $f \in L^p(X)$. Тогда существует такая функция $\eta \in \Omega$, что $\mathcal{N}_\eta f \in L^p(X)$. В частности,*

$$L^p(X) = \bigcup_{\eta \in \Omega} C^p_\eta(X).$$

В [2] были доказаны следующие теоремы вложения соболевского типа (для $X = [0,1]^n$ ранее их доказал В.И.Коляда [1]): пусть $1 < p < q < \infty$,

1) если $\sigma \in \Omega$ и

$$\eta(r) = \sigma(r) r^{\gamma(1/p-1/q)}, \tag{2}$$

то $C^p_\eta(X) \subset C^q_\sigma(X)$,

2) если $\eta(r) = r^{\gamma(1/p-1/q)}$, то $C^p_\eta(X) \subset L^q$.

Мы приводим условия для компактности этих вложений (такие утверждения называют теоремами типа Реллиха–Кондрашова, которые доказали подобные результаты для классов Соболева на $\mathbb{R}^n$).

Теорема 2. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\sigma \in \Omega$, η определяется равенством (2). Тогда если $\sigma_0 \in \Omega$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{r \to +0} \sigma(r)/\sigma_0(r) = 0, \tag{3}$$

то вложение $C^p_\eta(X) \subset C^q_{\sigma_0}(X)$ компактно.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\eta(r) = r^{\gamma(1/p-1/q)}$. Тогда если $\eta_0 \in \Omega$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{r \to +0} r^{\gamma(1/p-1/q)}/\eta_0(r) = 0, \tag{4}$$

то вложение $C^p_{\eta_0}(X) \subset L^q(X)$ компактно.

Теоремы 2 и 3 являются неулучшаемыми в том смысле, что во многих ситуациях условия (3) и (4) являются необходимыми для компактности соответствующих вложений.

Список литературы

[1] *Kolyada, V.I.* Estimates of maximal functions measuring local smoothness / V.I. Kolyada // Analisys Math. – 1999. – Vol. 35. – N. 1. – P. 277–300.

[2] *Иванишко, И.А.* Оценки максимальных функций Кальдерона–Коляды на пространствах однородного типа / И.А. Иванишко // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 127. – № 1. – С. 64–67.

[3] *Иванишко, И.А.* Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой / И.А. Иванишко // Мат. заметки. – 2005. – Т. 77. – № 6. – С. 937–941.

Иванишко Ия, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, ivanishko@bsu.by.

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, krotov@bsu.by.

УДК 517.983.34

В.В. Кашевский

Свойства оператора дробно-логарифмического интегрирования

Основные результаты современной теории интегралов и производных дробного порядка можно найти в фундаментальной монографии [1]. Пусть задана непрерывная и 2π-периодическая функция $f(x)$. Функции поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}, f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx, \; f_0 = 0.$$

В [1] подробно рассмотрен дробный интеграл Вейля

$$I_+^{(\alpha)} f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(ik)^\alpha} e^{ikx}.$$

Нам понадобятся два определения.

Определение 1. Обозначим

$$I^{(\alpha,1)} f = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' \frac{f_k}{(ik)^\alpha \ln(ik)} e^{ikx}. \tag{1}$$

Оператор, задаваемый формулой (1), будем называть степенно-логарифмическим интегралом. При этом полагаем

$$(ik)^\alpha = \; |k|^\alpha \exp\left(\frac{1}{2} i\pi\alpha \operatorname{sign} k\right),$$

а $\ln(ik) = \ln|k| + i\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k, \; \alpha > 0.$