Список литературы

[1] *Ахиезер, Н.И.* Элементы теории эллиптических функций / Н.И. Ахиезер. – М., 1970.

[2] *Зверович, Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в Гельдеровских классах на римановых поверхностях / Э.И. Зверович // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. XXVI. – № 1(157). – С. 113–119.

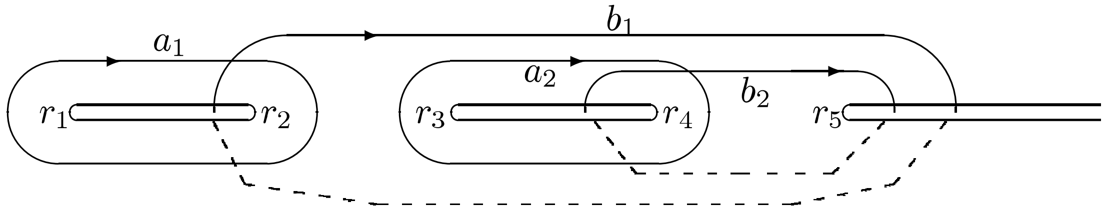
Давьялова Елена Вячеславовна, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e.kiaora@gmail.com.

УДК 517.948.32:517.544

Е.В. Давьялова, Э.И. Зверович

Об одной гиперэллиптической поверхности

Пусть $-\infty = r_0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5 < r_6 = +\infty$ — фиксированные величины. Гиперэллиптическую риманову поверхность $\Re$ рода 2, заданную уравнением $w^2 = \prod_{k=1}^{5}(z - z_k)$, будем изображать в виде двулистного накрытия сферы переменного z с точками ветвления (∞, ∞), $(r_k, 0)$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Разрезая сферу по отрезкам $[r_1, r_2]$, $[r_3, r_4]$, $[r_5, +\infty]$, будем считать, что листы склеены «на́крест» вдоль указанных разрезов. Условимся проводить сплошные линии на верхнем листе, а пунктирные — на нижнем. Каноническое рассечение a_1, a_2, b_1, b_2 поверхности $\Re$ выберем и ориентируем так, как указано на рисунке.



Базис абелевых дифференциалов 1-го рода $\frac{dz}{w}$, $\frac{z\,dz}{w}$ нормируем относительно выбранного канонического рассечения. С этой целью введем полные гиперэллиптические интегралы:

$$\frac{A_0}{2} := \int_{-\infty}^{r_1} \frac{dx}{|v|},\ \frac{A_k}{2} := \int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{dx}{|v|},\ (k = 1, 2, 3, 4),\ \frac{A_5}{2} := \int_{r_5}^{+\infty} \frac{dx}{|v|}, \tag{1}$$

$$\frac{B_0}{2} := \int\limits_{-\infty}^{r_1} \frac{xdx}{|v|}, \ \frac{B_k}{2} := \int\limits_{r_k}^{r_{k-1}} \frac{xdx}{|v|}, \ (k=1,2,3,4), \ \frac{B_5}{2} := \int\limits_{r_5}^{+\infty} \frac{xdx}{|v|}, \tag{2}$$

где переменные x и v связаны уравнением $v^2 = \prod_{k=1}^5 (x - r_k)$. Положительные постоянные (1), (2) не независимы. Чтобы найти зависимости между ними, обозначим через

$$w(z) = \operatorname{sqrt}\left\{\prod_{k=1}^{5}(z - r_k)\right\}$$

ту непрерывную на сфере $\widehat{\mathbb{C}}$, разрезанной вдоль отрезков $[r_1, r_2]$, $[r_3, r_4]$, $[r_5, +\infty]$, ветвь корня, которая положительна на верхнем берегу разреза $[r_5, +\infty]$. Тем самым однозначно определяются значения ветви $w(z)$ на остальной части вещественной оси. А именно:

$$\begin{array}{lll}
\arg w^+(x) = 0 & \text{при} & r_5 < x < +\infty\,, \\
\arg w(x) = \frac{\pi}{2} & \text{при} & r_4 < x < r_5\,, \\
\arg w^+(x) = \pi & \text{при} & r_3 < x < r_4\,, \\
\arg w(x) = \frac{3\pi}{2} & \text{при} & r_2 < x < r_3\,, \\
\arg w^+(x) = 2\pi & \text{при} & r_1 < x < r_2\,, \\
\arg w(x) = \frac{5\pi}{2} & \text{при} & -\infty < x < r_1\,.
\end{array} \tag{3}$$

Применяя интегральную теорему Коши к дифференциалам $\frac{dz}{w}$ и $\frac{zdz}{w}$, аналитическим в верхней полуплоскости, найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{w} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{zdz}{w} = 0.$$

Отсюда, учитывая (1)–(3), получим:

$$-iA_0 + A_1 + iA_2 - A_3 - iA_4 + A_5 = 0,$$
$$-iB_0 + B_1 + iB_2 - B_3 - iB_4 + B_5 = 0.$$

Выделяя здесь вещественные и мнимые части, будем иметь:

$$A_0 = A_2 - A_4; \quad A_5 = A_3 - A_1,$$

$$B_0 = B_2 - B_4; \quad B_5 = B_3 - B_1.$$

Комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов первого рода имеет вид:

$$du_1(z,w) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dz}{w} & \frac{zdz}{w} \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}; \qquad du_2(z,w) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{dz}{w} & \frac{zdz}{w} \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}. \qquad (4)$$

Матрица периодов этого базиса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & iB_{11} & iB_{12} \\ 0 & 1 & iB_{21} & iB_{22} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

симметричная вещественная положительно определенная матрица. Элементы этой матрицы выражаются через полные гиперэллиптические интегралы по следующим формулам:

$$B_{11} = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}; \qquad B_{12} = \frac{\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}};$$

$$B_{21} = \frac{\begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}; \qquad B_{22} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_4 & B_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Введем комплексно нормированный базис абелевых интегралов [1] первого рода

$$u_1(z,w) = \int\limits_{(-\infty,\infty)}^{(z,w)} du_1(t,v)\,, \qquad u_2(z,w) = \int\limits_{(-\infty,\infty)}^{(z,w)} du_2(t,v)\,, \qquad (6)$$

в которых путь интегрирования не пересекает линий канонического рассечения. Они равны нулю в точке $(-\infty,\infty)$ и принимают чисто мнимые значения, когда $z \in (-\infty, r_1)$. Поэтому *при любых* $e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ *построенная по ним тэта-функция Римана*

$$\theta(z) := \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} \exp\Big\{-\pi(B_{11}\mu^2 + 2B_{12}\mu\nu + B_{22}\nu^2) +$$

$$+ 2\pi i[\mu(u_1(z,w) - ie_1) + \nu(u_2(z,w) - ie_2)]\Big\} \qquad (7)$$

при $z \in (-\infty, r_1)$ *положительна как сумма положительного ряда. Значит, она отлична от тождественного нуля и поэтому имеет на* $\mathfrak{R}$ *точно два нуля* (z_1, w_1), (z_2, w_2), $z_1 \neq z_2$, *образующие единственное решение проблемы обращения Якоби*:

$$\begin{cases} u_1(z_1, w_1) + u_1(z_2, w_2) \equiv ie_1 - k_1, \\ u_2(z_1, w_1) + u_2(z_2, w_2) \equiv ie_2 - k_2, \end{cases}$$

где

$$k_1 = -\frac{1}{2} + iB_{11} + \int_{a_2} u_1^+(t,v)du_2(t,v)\,,$$

$$k_2 = -\frac{1}{2} + iB_{22} + \int_{a_1} u_2^+(t,v)du_1(t,v)$$

— римановы константы. Таким образом, функция (7) является единственным решением (с точностью до постоянного множителя) следующей задачи линейного сопряжения:

$$F^+(t,v) = F^-(t,v)\cdot\exp\Big\{-\pi B_{jj} + 2\pi i[w_j^+(t,v) - ie_j]\Big\}, \quad t \in a_j\,,\ j = 1, 2.$$

Полученные результаты применяются для решения краевых задач на римановой поверхности, заданной уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{5}(z - z_k).$$

Список литературы

[1] *Чеботарёв, Н.Г.* Теория алгебраических функций / Н.Г. Чеботарёв. – М.: Едиториал, УРСС, 2004.

Давьялова Елена Вячеславовна, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь, e.kiaora@gmail.com.

Зверович Эдмунд Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь.