Список литературы

[1] *Пекарский, А.А.* Оценки высших производных рациональных функций и их приложения / А.А. Пекарский // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 5. – С. 21–29.

[2] *Пекарский, А.А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (126). – № 4 (8). – С. 571–588.

[3] *Lorenz, G.G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G.G. Lorenz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Мардвилко Татьяна Сергеевна, Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка, Минск, Республика Беларусь, mardvilko@mail.ru.

УДК 517.53

А.А. Пекарский

Рациональная аппроксимация степенной функции в области с нулевым внешним углом

Для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ будем рассматривать функцию $f_\alpha(z) = z^\alpha$, аналитическую в области $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и удовлетворяющую условию $f_\alpha(x) > 0$ для $x \in (0, +\infty)$. Наилучшие рациональные приближения f_α на отрезке $[0,1]$ изучались (см., например, [1]) Ньюменом, А.А. Гончаром, А.П. Булановым, Н.С. Вячеславовым, Андерссеном, Шталем и другими авторами.

Здесь мы будем рассматривать наилучшие приближения f_α в области с нулевым внешним углом в начале координат. Именно для $\gamma > 1$ в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим область

$$G_\gamma = \{x + iy : x^2 + y^2 < 1 \text{ и } |y| > |x| \text{ при } x \le 0\}.$$

Через $\overline{G}_\gamma$ обозначим замыкание области G_γ; $\mathcal{R}_n$ – множество рациональных функций степени не выше $n, n = 0, 1, \ldots$ Введем

$$R_n(f_\alpha)_{C_A(\overline{G}_\gamma)} = \inf_{r_n \in \mathcal{R}_n} \max_{z \in \overline{G}_\gamma} |f_\alpha(z) - r_n(z)|$$

наилучшее равномерное приближение f_α в $\overline{G}_\gamma$ посредством множества $\mathcal{R}_n$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ *и* $\gamma > 1$. *Тогда существуют постоянные* $c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$, *зависящие лишь от* α *и* γ, *такие, что при* $n = 2, 3, 4, \dots$

$$c_1 \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}} \leq R_n(f_\alpha)_{C_A(\overline{G}_\gamma)} \leq c_2 \left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{\alpha}{\gamma-1}}.$$

Для $0 < p < \infty$ введем [2] пространство В.И. Смирнова $E_p(G_\gamma)$ функций f, аналитических в G_γ и наделенных стандартной квазинормой $\|f\|_{E_p(G_\gamma)}$ (нормой при $1 \leq p < \infty$). Отметим, что $f_\alpha \in E_p(G_\gamma)$ при $\alpha > -1/p$. Введем

$$R_n(f_\alpha)_{E_p(G_\gamma)} = \inf_{r_n \in \mathcal{R}_n} \|f - r_n\|_{E_p(G_\gamma)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

– наилучше рациональное E_p-приближение f_α в области G_γ.

Теорема 2. *Если* $0 < p < \infty$, $\alpha \in (-1/p, \infty) \setminus \mathbb{Z}$ *и* $\gamma > 1$, *то существуют постоянные* c_3 *и* c_4, *зависящие от* α, γ *и* p, *такие, что*

$$c_3 n^{-\frac{\alpha+1/p}{\gamma-1}} \leq R_n(f_\alpha)_{E_p(G_\gamma)} \leq c_4 n^{-\frac{\alpha+1/p}{\gamma-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теоремы 1 и 2 показывают, например, что условия, налагаемые на границу области G в теоремах типа Джексона [3] для наилучших рациональных приближений в пространстве $E_p(G)$, нельзя существенно ослабить.

Список литературы

[1] *Lorenz, G.G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G.G. Lorenz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

[2] *Привалов, И.И.* Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. – М.: ГИТТЛ, 1950.

[3] *Пекарский, А.А.* Рациональные приближения функций с производными из пространства В.И. Смирнова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 2001. – Т. 13. – № 2. – С. 165–190.

Пекарский Александр Антонович, доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный технологический университет, Минск, Республика Беларусь, pekarskii@gmail.com.