

Об альтернативе Титса для некоторых обобщенных тетраэдральных групп.

В.В. Беняш-Кривец, Сюин Хуа

Титс [?] доказал, что если G — линейная группа, то либо G содержит неабелеву свободную подгруппу, либо является почти разрешимой. Если для произвольной группы G выполнено одно из указанных условий, то говорят, что G удовлетворяет альтернативе Титса. Обобщенные тетраэдральные группы, введенные Винбергом в [?], имеют копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 \rangle, \quad (1)$$

где $R_1(a_1, a_2)$, $R_2(a_1, a_3)$, $R_3(a_2, a_3)$ — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3 , которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо ≥ 2 , а показатели $m, p, q \geq 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q) . Альтернатива Титса для обобщенных тетраэдральных групп исследовалась в монографии [?, гл. 9]. Наиболее общий результат состоит в следующем. Если все образующие G имеют конечный порядок и

$$\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 2, \quad (2)$$

то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу и, значит, удовлетворяет альтернативе Титса. В [?, гл. 9] получен также ряд других результатов, подтверждающих гипотезу о том, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса, но в силу громоздкости формулировок у нас нет возможности их все здесь упомянуть. Тем не менее для достаточно большого числа типов групп эта гипотеза остается недоказанной. В предлагаемой работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа типа $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу во всех случаях, за исключением групп*

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_1 a_2)^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle, \\ G_2 &= \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2 a_2)^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

которые являются разрешимыми.

Теорема 1 завершает доказательство гипотезы о том, что обобщенная тетраэдральная группа G удовлетворяет альтернативе Титса в случае, когда хотя бы одна из образующих G имеет бесконечный порядок. С учетом этого, гипотеза остается открытой для конечного числа типов групп, не удовлетворяющих соотношению (??). Ниже мы будем обозначать через E — единичную матрицу в $SL_2(\mathbb{C})$, через $[A]$ — образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\text{tr } A$ — след матрицы A . Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется неприводимой, если ее прообраз $\bar{H}$ в $SL_2(\mathbb{C})$ — неприводимая подгруппа в обычном смысле. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ является *неэлементарной*, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Если H — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, то H содержит неабелеву свободную подгруппу [?]. В [?] также доказано, что если подгруппа H порождена двумя элементами $[A]$ и $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности в том случае, если по меньшей мере два из трех следов $\text{tr } A$, $\text{tr } B$, $\text{tr } AB$ равны нулю. Для доказательства теорем нам необходимы вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и X — матрица из $SL_2(\mathbb{C})$, отличная от $\pm E$. Тогда $[X]^m = 1$ тогда и только тогда, когда $\text{tr } X = 2 \cos \frac{r\pi}{m}$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$.*

Доказательство следует из того, что собственными значениями X должны быть числа $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$, где ε — корень степени $2m$ из единицы.

Для произвольного элемента $w \in F_3 = F_3(b_1, b_2, b_3)$, где $F_3(b_1, b_2, b_3)$ — свободная группа с базисом b_1, b_2, b_3 , рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w : SL_2(\mathbb{C})^3 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_w(A, B, C) = \text{tr } w(A, B, C).$$

Если $w = b_i^{u_1} b_j^{v_1} \dots b_i^{u_s} b_j^{v_s}$, то в [?] доказано, что $\tau_w = Q_w(\tau_{b_i}, \tau_{b_j}, \tau_{b_i b_j})$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ — однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами. Функцию τ_w обычно называют характером Фрике, а многочлен Q_w — многочленом Фрике элемента w . Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике, которые легко следуют из теоремы Гамильтона-Кэли: $\tau_{w^{-1}} = \tau_w$, $\tau_{gh} = \tau_g \tau_h - \tau_{gh^{-1}}$.

Лемма 2. Для произвольных чисел $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$ существуют матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\text{tr } A_i = a_i$, $\text{tr } A_i A_j = a_{ij}$ для всех i, j .

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $a_1 \neq 2$. Матрицы A_1, A_2, A_3 будем искать в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \frac{-x_2^2 + a_2 x_2 - 1}{y_2} & a_2 - x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & \frac{-x_3^2 + a_3 x_3 - 1}{y_3} \\ y_3 & a_3 - x_3 \end{pmatrix},$$

где $x_1 \neq \pm 1$ — корень уравнения $x_1 + x_1^{-1} = a_1$. Вычисляя следы $\text{tr } A_1 A_2$, $\text{tr } A_1 A_3$, получаем уравнения

$$(x_1 - x_1^{-1})x_2 + x_1^{-1}a_2 = a_{12}, \quad (x_1 - x_1^{-1})x_3 + x_1^{-1}a_3 = a_{13},$$

из которых находим x_2, x_3 . Условие $\text{tr } A_2 A_3 = a_{23}$ дает уравнение

$$y_2 y_3 + \frac{(-x_2^2 + a_2 x_2 - 1)(-x_3^2 + a_3 x_3 - 1)}{y_2 y_3} + x_2 x_3 + (a_2 - x_2)(a_3 - x_3) = a_{23}. \quad (3)$$

Если $b_2 = -x_2^2 + a_2 x_2 - 1 = 0$, то полагаем $y_3 = 1$ и из (??) находим y_2 . Аналогично, если $b_3 = -x_3^2 + a_3 x_3 - 1 = 0$, то полагаем $y_2 = 1$ и из (??) находим y_3 . Если же $b_2 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$, то полагаем $y_2 = 1$ и из (??) находим $y_3 \neq 0$.

Пусть теперь $a_1 = 2$. Если $a_2 = a_{12}$ и $a_3 = a_{13}$, то положим $A_1 = E$. После этого нетрудно подобрать матрицы A_2 и A_3 с требуемыми свойствами. Предположим, что $a_2 \neq a_{12}$. Матрицы A_1, A_2, A_3 будем искать в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & \frac{-x_2^2 + a_2 x_2 - 1}{a_{12} - a_2} \\ a_{12} - a_2 & a_2 - x_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ a_{13} - a_3 & a_3 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{13} - a_3 = 0$, то в уравнение $\text{tr } A_2 A_3 = a_{23}$ нетривиально входит y_3 , что позволяет найти искомые матрицы A_2 и A_3 . Если $a_{13} - a_3 \neq 0$, то положим $y_3 = \frac{-x_3^2 + a_3 x_3 - 1}{a_{13} - a_3}$. Тогда в уравнение $\text{tr } A_2 A_3 = a_{23}$ нетривиально входят x_2, x_3 , что также позволяет найти искомые матрицы A_2 и A_3 . Лемма доказана.

Далее, нам нужна более детальная информация о многочленах Фрике (см. [?]). Рассмотрим многочлены $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. Индукцией по n легко проверить, что при $n > 0$

$$P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}. \quad (4)$$

Из (??) следует, что многочлен $P_n(x)$, $n > 0$, имеет n нулей, определенных формулой

$$x_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Далее, пусть $w = b_i^{u_1} b_j^{v_1} \dots b_i^{u_s} b_j^{v_s}$, $s \geq 1$, — циклически редуцированное слово в свободной группе F_3 и пусть $x = \tau_{b_i}$, $y = \tau_{b_j}$, $z = \tau_{b_i b_j}$. В [?] доказано, что многочлен Фрике Q_w имеет вид

$$Q_w(x, y, z) = M_s(x, y) z^s + \dots + M_0(x, y), \quad (6)$$

где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x) P_{v_i-1}(y)$. В дальнейшем нам также понадобится следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \quad (7)$$

Идея доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы построить представление $\rho : G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ такое, что образ $\rho(G)$ является неэлементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$. Тогда группа $\rho(G)$ (а следовательно, и G) содержит неабелеву свободную подгруппу. Для построения этого представления мы будем использовать следующую конструкцию. Обозначим $x_i = \tau_{b_i}$, $y_{ij} = \tau_{b_i b_j}$, и положим $x_i = 2 \cos \frac{\pi}{e_i}$ в случае $e_i > 0$. Затем рассмотрим многочлены Фрике $f_i = Q_{R_i}$ и составим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, y_{12}) = 0, \\ f_2(x_1, x_3, y_{13}) = 0, \\ f_3(x_2, x_3, y_{23}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Если $u = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_{12}^0, y_{13}^0, y_{23}^0)$ — произвольное решение (??), то по лемме ?? найдутся матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A_i = x_i^0$, $\operatorname{tr} A_i A_j = y_{ij}^0$. Пусть $H(u)$ — подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, порожденная элементами $[A_i]$. Если $H(u)$ неприводима, то она определена однозначно с точностью до сопряжения. С учетом леммы ??, отображение

$$\rho : G \rightarrow H(u), \quad \rho(a_i) = [A_i],$$

задает представление G в $PSL_2(\mathbb{C})$ и $\rho(G) = H(u)$. Поэтому для доказательства теорем нам достаточно найти такое решение u системы (??), что $H(u)$ — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$R_1(a_1, a_2) = a_1^{u_1} a_2 \dots a_1^{u_s} a_2, \quad R_2(a_1, a_3) = a_1^{v_1} a_3 \dots a_1^{v_r} a_3, \quad R_3(a_2, a_3) = a_2 a_3. \quad (9)$$

Вначале рассмотрим случай $s = r = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $u_1, v_1 > 0$ (при необходимости мы можем перейти от соотношения $R_i^2 = 1$ к соотношению $(R_i^{-1})^2 = 1$). Предположим, что одно из чисел u_1, v_1 больше 2, пусть, например, $u_1 > 2$. Тогда мы имеем $x_2^0 = x_3^0 = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$ и система (??) имеет вид

$$P_{u_1-1}(x_1) y_{12} = 0, \quad P_{v_1-1}(x_1) y_{13} = 0, \quad y_{23} = 0. \quad (10)$$

Поскольку в силу (??) $x_1^0 = 2 \cos \frac{\pi}{u_1}$ — корень $P_{u_1-1}(x_1)$, то набор $u = (2 \cos \frac{\pi}{u_1}, 0, 0, 3, 0, 0)$ является решением (??). Рассмотрим группу $H(u)$ и подгруппу F в ней, порожденную элементами $[A_1]$, $[A_2]$. Группа F бесконечна, поскольку по построению $\operatorname{tr} A_1 A_2 = 3$ и поэтому $[A_1 A_2]$ имеет бесконечный порядок в $PSL_2(\mathbb{C})$. Поскольку $(2 \cos \frac{\pi}{u_1})^2 + 5 \neq 0$, то в силу (??) группа F неприводима. Далее, группа F не может быть бесконечной группой диэдра, поскольку она содержит элемент $[A_1]$ порядка $u_1 \geq 3$. Значит, F , а вместе с ней и $H(u)$ — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, что нам и требуется.

Предположим теперь, что $0 < u_1, v_1 \leq 2$. Нам нужно рассмотреть 3 группы — G_1 и G_2 из условия теоремы 1, а также группу

$$G_3 = \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2 a_2)^2 = (a_1^2 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle.$$

Заметим, что в группе G_1 циклическая подгруппа $\langle a_1 \rangle$ является нормальной, а факторгруппа $G_1/\langle a_1 \rangle$ изоморфна группе диэдра $D_2 = \langle a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle$. Так как группы $\langle a_1 \rangle$ и $G_1/\langle a_1 \rangle$ разрешимы, то группа G_1 также разрешима.

Рассмотрим группу G_2 . Циклическая подгруппа $\langle a_1^2 \rangle$ является нормальной в G_2 , а факторгруппа $G_2/\langle a_1^2 \rangle$ изоморфна группе $H = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle$. Далее, циклическая подгруппа $\langle a_3 \rangle$ является нормальной в H , а факторгруппа $H/\langle a_3 \rangle$ изоморфна бесконечной группе диэдра $D_\infty = \langle a_1, a_2; a_1^2 = a_2^2 = 1 \rangle$. Так как группы $\langle a_3 \rangle$ и $H/\langle a_3 \rangle$ разрешимы, то группа H также разрешима. Поскольку группы $\langle a_1^2 \rangle$ и $G_2/\langle a_1^2 \rangle \cong H$ разрешимы, то группа G_2 разрешима.

Рассмотрим теперь группу G_3 . Как и выше, циклическая подгруппа $\langle a_1^2 \rangle$ является нормальной в G_3 , а факторгруппа $G_3/\langle a_1^2 \rangle$ изоморфна группе $H = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle$. Так как $H = H_1 * D_2$, где $H_1 = \langle a_1; a_1^2 = 1 \rangle$ — циклическая группа порядка 2, а $D_2 = \langle a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle$ — группа диэдра порядка 4, то H (а поэтому и G_3) содержит неабелеву свободную подгруппу. Таким образом, случай $r = s = 1$ полностью рассмотрен.

Будем теперь предполагать, что хотя бы одно из чисел r, s больше 1. Пусть, например, $s > 1$. Дальнейшее рассмотрение разбивается на 2 случая: 1) в слове $R_1(a, b) = a^{u_1} b \dots a^{u_s} b$ число s нечетно и сумма показателей $U = \sum_{i=1}^s u_i = 0$; 2) s четно, либо s нечетно и $U \neq 0$.

Случай 1. Предположим вначале, что слово $R_2(a_1, a_3)$ не принадлежит множеству слов $\{a_1 a_3, a_1^{-1} a_3, a_1^2 a_3, a_1^{-2} a_3\}$. Рассмотрим факторгруппу $\bar{G}$ группы G , добавляя соотношение $a_2 = 1$. Тогда $\bar{G}$ имеет копредставление $\bar{G} = \langle a_1, a_3; a_3^2 = R_2^2(a_1, a_3) = 1 \rangle$. Таким образом, $\bar{G}$ является обобщенной треугольной группой, которая в силу [?, гл. 7.3.3] содержит неабелеву свободную подгруппу.

Предположим теперь, что $R_2(a_1, a_3) \in \{a_1 a_3, a_1^{-1} a_3, a_1^2 a_3, a_1^{-2} a_3\}$. Тогда с точностью до изоморфизма нам нужно рассмотреть следующие группы:

$$\begin{aligned} G_4 &= \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = R_1^2(a_1, a_2) = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle, \\ G_5 &= \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = R_1^2(a_1, a_2) = (a_1^2 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $H = \ker \varphi$, где $\varphi : G_4 \rightarrow \langle c; c^2 = 1 \rangle$ — гомоморфизм, задаваемый условиями $a_1 \mapsto 1$, $a_2 \mapsto 1$, $a_3 \mapsto c$. Применяя метод Райдемайстера-Шрайера, находим, что H имеет копредставление

$$H = \langle a, b; b^2 = R_1^2(a, b) = R_1^2(a^{-1}, b) = 1 \rangle.$$

Введем элементы $x_i = a^i b a^{-i}$. По предположению, $U = \sum_{i=1}^s u_i = 0$, поэтому $R_1(a, b)$ можно записать как слово от x_i . Пусть m — наибольшее целое число такое, что x_m , либо x_{-m} входит в $R_1(a, b)$. Тогда группу H можно записать в виде

$$\begin{aligned} H &= \langle x_{-m}, \dots, x_m, a; S_1^2(x_{-m}, \dots, x_m) = S_1^2(x_m, \dots, x_{-m}) = x_{-m}^2 = \dots = x_m^2 = 1, \\ &\quad a x_i a^{-1} = x_{i+1}, i = -m, \dots, m-1 \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим группы $K = \langle x_{-m}, \dots, x_m; S_1^2(x_{-m}, \dots, x_m) = S_1^2(x_m, \dots, x_{-m}) = x_{-m}^2 = \dots = x_m^2 = 1 \rangle$, $K_1 = \langle x_{-m}, \dots, x_{m-1} \rangle$, $K_2 = \langle x_{-m+1}, \dots, x_m \rangle$. Тогда H является HNN-расширением группы K при помощи проходной буквы a и ассоциированных подгрупп K_1 и K_2 . Поскольку факторгруппа по коммутанту $K/[K, K]$ изоморфна $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2m+1}$, то ее порядок равен 2^{2m+1} . С другой стороны, факторгруппы $K_1/[K_1, K_1]$ и $K_2/[K_2, K_2]$ имеют порядок не более 2^{2m} . Значит, $K_1 \neq K$ и $K_2 \neq K$. Поскольку H содержит амальгамированное произведение $S = K *_{K_1} * K *_{K_2} * K$ (см. [?, предложение 5]) и группа S содержит неабелеву свободную подгруппу (см. [?]), то таким же свойством обладает H (а поэтому и G_4).

Рассмотрим теперь группу G_5 . Пусть $T = \ker \varphi$, где $\varphi : G_5 \rightarrow \langle c; c^2 = 1 \rangle$ — гомоморфизм, задаваемый условиями $a_1 \mapsto 1$, $a_2 \mapsto 1$, $a_3 \mapsto c$. Применяя метод Райдемайстера-Шрайера, находим, что T имеет копредставление

$$T = \langle b_1, b_2, b_3; b_3^2 = R_1^2(b_1, b_3) = R_1^2(b_2, b_3) = 1, b_1^2 b_2^2 = 1 \rangle.$$

Если к соотношениям группы T добавить соотношение $b_2 = b_1^{-1}$, то получим факторгруппу

$$H = \langle b_1, b_3; b_3^2 = R_1^2(b_1, b_3) = R_1^2(b_1^{-1}, b_3) = 1 \rangle.$$

Выше мы уже доказали, что H (а поэтому и G_5) содержит неабелеву свободную подгруппу.

Случай 2. Система (??) имеет вид

$$g_1(x_1, y_{12}) = f_1(x_1, 0, y_{12}) = 0, \quad g_2(x_1, y_{13}) = f_2(x_1, 0, y_{13}) = 0, \quad y_{23} = 0. \quad (11)$$

При этом многочлены g_1 и g_2 имеют целые коэффициенты и в силу (??) имеют вид

$$g_1(x_1, y_{12}) = M_0(x_1)y_{12}^s + \dots + M_s(x_1), \quad g_2(x_1, y_{13}) = N_0(x_1)y_{13}^r + \dots + N_r(x_1), \quad (12)$$

где $M_0(x_1) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x_1)$, $N_0(x_1) = \prod_{i=1}^r P_{v_i-1}(x_1)$.

Предположим вначале, что в разложение $g_1(x_1, y_{12})$ на неприводимые множители входит неприводимый многочлен $h(x_1, y_{12})$, содержащий обе переменные x_1, y_{12} и не делящийся на $x_1^2 + y_{12}^2 - 4$. Тогда h имеет целые коэффициенты и найдутся такие трансцендентные $x_1^0, y_{12}^0 \in \mathbb{C}$, что $h(x_1^0, y_{12}^0) = 0$ и

$$(x_1^0)^2 + (y_{12}^0)^2 - 4 \neq 0. \quad (13)$$

Поскольку при этом старший коэффициент $N_0(x_1^0)$ многочлена g_2 отличен от нуля, то $g_2(x_1^0, y_{13})$ — многочлен положительной степени от y_{13} и пусть y_{13}^0 — его корень. Набор $u = (x_1^0, 0, 0, y_{12}^0, y_{13}^0, 0)$ является решением (??). Рассмотрим группу $H(u)$ и подгруппу F в ней, порожденную элементами $[A_1], [A_2]$. Как и выше, группа F бесконечна, отлична от бесконечной группы диэдра и в силу (??) неприводима. Значит, F (а также $H(u)$) — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$, что нам и требуется.

Аналогичное рассуждение показывает, что G содержит неабелеву свободную подгруппу в случае, когда в разложение $g_2(x_1, y_{13})$ на неприводимые множители входит неприводимый многочлен $h(x_1, y_{13})$, содержащий обе переменные x_1 и y_{13} и не делящийся на $x_1^2 + y_{13}^2 - 4$. Поэтому нам остается рассмотреть случай, когда

$$g_1(x_1, y_{12}) = A(x_1)B(y_{12})(x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p, \quad g_2(x_1, y_{13}) = A_1(x_1)B_1(y_{13})(x_1^2 + y_{13}^2 - 4)^q.$$

Предположим, что один из многочленов A, B, A_1, B_1 имеет ненулевой корень. Пусть, например, $A(x_1^0) = 0$ для некоторого $x_1^0 \neq 0$. Возьмем y_{12}^0 — произвольный трансцендентный элемент из $\mathbb{C}$ и y_{13}^0 — произвольный корень многочлена $g_2(x_1^0, y_{13})$. Тогда набор $u = (x_1^0, 0, 0, y_{12}^0, y_{13}^0, 0)$ является решением (??). В точности как и выше получаем, что группа $H(u)$ — неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ (неприводимость соответствующей подгруппы $F = \langle [A_1], [A_2] \rangle$ следует из того, что $(x_1^0)^2 + (y_{12}^0)^2 - 4 \neq 0$ в силу алгебраичности x_1^0 и трансцендентности y_{12}^0). Если же $B(y_{12})$ имеет ненулевой корень, то берем $y_{12}^0 \neq 0$ такое, что $B(y_{12}^0) = 0$, а x_1^0 — произвольный трансцендентный элемент из $\mathbb{C}$.

Таким образом, мы можем считать, что

$$g_1(x_1, y_{12}) = ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p, \quad g_2(x_1, y_{13}) = ax_1^k y_{13}^e (x_1^2 + y_{13}^2 - 4)^q,$$

где $a \in \mathbb{C}^*$. Завершает доказательство теоремы 1 следующая лемма.

Лемма 3. Если $R_1(a_1, a_2) = a_1^{u_1} a_2 \dots a_1^{u_s} a_2$, где $s > 1$ и либо s четно, либо s нечетно и $U = \sum_{i=1}^s u_i \neq 0$, то многочлен Фрике $g_1(x_1, y_{12})$ не равен $ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p$.

Доказательство. Предположим, что $g_1(x_1, y_{12}) = ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p$. Последнее равенство означает, что для любой пары матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такой, что $\text{tr } A = x_1, \text{tr } B = 0, \text{tr } AB = y_{12}$ мы должны иметь равенство

$$\text{tr } R_1(A, B) = ax_1^m y_{12}^l (x_1^2 + y_{12}^2 - 4)^p. \quad (14)$$

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ z & -i \end{pmatrix},$$

где t и z — произвольные переменные. Тогда $\operatorname{tr} A = t + t^{-1}$, $\operatorname{tr} AB = z + it - it^{-1}$. Подставляя в (??), получаем

$$\operatorname{tr} R_1(A, B) = a(t + t^{-1})^m (z + it - it^{-1})^l z^p (z + 2it - 2it^{-1})^p. \quad (15)$$

С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что след матрицы $R_1(A, B)$ имеет вид

$$\operatorname{tr} R_1(A, B) = H_0(t)z^s + \dots + H_{s-1}(t)z + i^s t^U + (-i)^s t^{-U}, \quad (16)$$

где $H_i(t)$ — некоторые рациональные функции от t . В силу условий леммы мы имеем, что $i^s t^U + (-i)^s t^{-U} \neq 0$. Следовательно, в (??) мы должны иметь $p = 0$, и поэтому $l = s$. Теперь, сравнивая в (??) и (??) слагаемые, не содержащие z , мы получаем, сокращая на i^s , равенство

$$t^U + (-1)^s t^{-U} = a(t + t^{-1})^m (t - t^{-1})^s. \quad (17)$$

Нетрудно показать, что при $s > 1$ равенство (??) невозможно. Лемма ??, а вместе с ней и теорема 1, доказаны.

Список литературы

- [1] Tits J. Free subgroups in linear groups. // *J. Algebra*. 1972. Vol. 20. P. 250–270.
- [2] Винберг Э.Б. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями. // *Матем. сб.* 1997. Т. 188, № 9. С. 3–12.
- [3] Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.
- [4] Majied A., Masson A.W. Solvable-by-finite subgroups of $GL(2, F)$. // *Glasgow Math. J.* 1978. V. 19. P. 45–48.
- [5] Horowitz R. Characters of free groups represented in the two dimensional linear group. // *Comm. Pure. Appl. Math.* 1972. V. 25. P. 635–649.
- [6] Culler M., Shalen P. Varieties of group representations and splittings of 3 manifolds. // *Ann. of Math.* 1983. V. 117. P. 109–147.
- [7] Traina C. Trace polynomial for two generator subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$. // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1980. V. 79. P. 369–372.
- [8] Серр Ж.-П. Деревья, амальгамы и SL_2 . // Периодический сб. переводов "Математика". 1974. Т. 18, № 1. С. 3–51.
- [9] Baumslag G., Shalen P.B. Amalgamated products and finitely presented groups. // *Comment. Math. Helv.* 1990. V. 65. P. 234–254.

BENIASH-KRYVETS V.V., HUA XIUYING. On the Tits alternative for some generalized tetraedron groups.

Summary.

It is proved that generalized tetraedron groups of type $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$ contain a non-abelian free subgroup except two groups which are solvable. In particular, the Tits alternative holds for such groups.

УДК 512.543.76. В.В. Беньш-Кривец, Сюин Хуа. Об альтернативе Титса для некоторых обобщенных тетраэдральных групп.

Титс доказал, что если G — линейная группа, то либо G содержит неабелеву свободную подгруппу, либо является почти разрешимой. Если для произвольной группы G выполнено одно из указанных условий, то говорят, что G удовлетворяет альтернативе Титса. Обобщенные тетраэдральные группы, введенные Винбергом, имеют копредставление вида

$$G = \langle a_1, a_2, a_3; a_1^{e_1} = a_2^{e_2} = a_3^{e_3} = R_1^m(a_1, a_2) = R_2^p(a_1, a_3) = R_3^q(a_2, a_3) = 1 \rangle,$$

где $R_1(a_1, a_2)$, $R_2(a_1, a_3)$, $R_3(a_2, a_3)$ — циклически редуцированные слова в свободной группе, порожденной a_1, a_2, a_3 , которые не являются собственной степенью, показатели e_1, e_2, e_3 либо равны 0, либо ≥ 2 , а показатели $m, p, q \geq 2$. Будем говорить, что группа G имеет тип (e_1, e_2, e_3, m, p, q) . К настоящему времени известен ряд результатов, подтверждающих гипотезу о том, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть G — обобщенная тетраэдральная группа типа $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$. Тогда G содержит неабелеву свободную подгруппу во всех случаях, за исключением групп

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_1 a_2)^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle, \\ G_2 &= \langle a_1, a_2, a_3; a_2^2 = a_3^2 = (a_1^2 a_2)^2 = (a_1 a_3)^2 = (a_2 a_3)^2 = 1 \rangle, \end{aligned}$$

которые являются разрешимыми.

Сведения об авторах.

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры Белорусского государственного университета.

Домашний адрес: ул. Якубовского, д. 78, кв. 264. 220018 Минск.

Рабочий телефон: 209-50-49, домашний телефон: 274-73-36, моб. (029) 374-73-36.

e-mail: benyash@bsu.by

Сюин Хуа, аспирант кафедры высшей алгебры Белорусского государственного университета (КНР).

Научный руководитель — Беняш-Кривец В.В.

e-mail: huaxiuyingnihao@163.com