

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Введение

Известны три способа получения асимптотического разложения дробного интеграла Римана — Лиувилля

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (1)$$

при $x \rightarrow +\infty$ в предположении степенной асимптотики подынтегральной функции:

$$f(t) \sim \sum_{k=-l}^{\infty} a_k t^{-\mu_k}, \quad \mu_{-l} < \dots < \mu_{-1} \leq 0 < \mu_0 < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

Это восходящий к А. Н. Тихонову, А. А. Самарскому [1] модифицированный метод последовательных разложений [2], [3] (т. 1, с. 323—324); метод, основанный на аналитическом продолжении преобразования Меллина и использовании равенства Парсеваля [3] (т. 3, с. 271—272), [4], и метод теории обобщенных функций [5]. Более полные литературные ссылки можно найти в книгах [3] (§§ 11, 31, 32), [6] (§§ 16, 17).

Первый из указанных методов применен в [2] для нахождения асимптотического разложения интеграла свертки с переменным верхним пределом $\Omega(x) = \int_0^x g(x-t) h(t) dt$ при $x \rightarrow +\infty$ при условии, что функции $g(t)$ и $h(t)$ имеют частный случай асимптотики (2):

$$f(t) \sim \sum_{k=-l}^{-1} a_k t^{-\mu_k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-k-\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Второй метод использован в [7] для получения асимптотического разложения при $x \rightarrow +\infty$ более общего, чем (1), дробного интеграла от функции $f(x)$ по функции x^p (см. [6], § 18):

$$(I_{0+; x^p}^{\alpha} f)(x) = \frac{p}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{t^{p-1} f(t) dt}{(x^p - t^p)^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad p > 0, \quad (4)$$

в предположении полиномиально-степенной асимптотики $f(t)$:

$$f(t) \sim e^{-at} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\mu_k} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty,$$

где $a \geq 0$, $\{\mu_k\}$ — монотонно возрастающая последовательность, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty$.

В случае степенной асимптотики (2) в [7] отмечено, что асимптотические представления для $I_{0+; x^p}^{\alpha} f$ будут различны в зависимости от того, что $\mu_k \neq p(j+1)$ ни при каких $k, j=0, 1, \dots$ или же существует по крайней мере одна пара таких чисел k и j , что $\mu_k = p(j+1)$. При этом в первом случае найдено асимптотическое разложение для $I_{0+; x^p}^{\alpha} f$, а во втором — получен только первый член асимптотики. В работах [2], [7] (см. также [3]) не даны явные выражения для остаточных членов. Третьим методом в [5] установлены как асимптотические разложения дробного интеграла Римана — Лиувилля (1), так и вид остаточных членов при условии простейшей степенной асимптотики (3) с $a_k = 0, k = -l, \dots, -1$.

Данная работа продолжает эти исследования. Мы применяем модифицированный метод последовательных разложений для нахождения асимптотичес-

ких представлений дробного интеграла (4) в предположении асимптотики (2). Данный метод в отличие от метода работы [7] позволяет дать как полные асимптотические разложения для $I_{0+; x^p}^\alpha f$ в случаях $\mu_k \neq p(j+1)$ и $\mu_k = p(j+1)$, так и вычислить явно остаточные члены этих разложений. В частности, при $p=1$ из наших результатов выводятся асимптотические представления и оценки для остаточных членов дробного интеграла Римана — Лиувилля (1) (см. далее замечания 1—4).

Полученные результаты применяются для установления асимптотических разложений при $|x| \rightarrow +\infty$ многомерного дробного интеграла или потенциала Рисса

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{\pi^{n/2} \Gamma(\alpha/2)} \int_{R^n} \frac{f(t) dt}{|x-t|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n, \quad (5)$$

с радиальной плотностью $f(t) = f(|t|)$, имеющей степенную асимптотику вида (2) при $|t| \rightarrow +\infty$. При этом используется найденная в работе [8] связь

$$(I^\alpha f)(r) = r^{2-n} (I_{0+; x^2}^{\alpha/2} (I_{-; x^2}^{\alpha/2} f)(s))(r), \quad r = |x|, \quad (6)$$

потенциала Рисса (5) с радиальной плотностью с одномерным дробным интегралом (4) и соответствующим правосторонним интегралом

$$(I_{-; x^p}^\alpha f)(x) = \frac{p}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{t^{p-1} f(t) dt}{(t^p - x^p)^{1-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad p > 0. \quad (7)$$

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 доказываются основные теоремы об асимптотических представлениях дробного интеграла (4). В § 2 устанавливаются оценки для остаточных членов этих представлений и на основании этого приводятся асимптотические разложения для дробных интегралов (4) и (1). В § 3 находится асимптотика дробного интеграла (5).

§ 1. Представления одномерных дробных интегралов

Начнем исследование с простейшего случая, когда $f(t)$ имеет асимптотику (2) с $\mu_k \neq p(j+1)$ ни при каких $k, j \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$.

Теорема 1. Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (2), причем $\mu_k \neq p(j+1)$ ни при каких $k, j \in N_0 = \{0, 1, \dots\}$. Тогда для дробного интеграла (4) при любом натуральном N имеет место представление

$$(I_{0+; x^p}^\alpha f)(x) = \sum_{k=-l}^N \frac{\Gamma(1 - \mu_k/p) a_k}{\Gamma(1 + \alpha - \mu_k/p)} x^{\alpha p - \mu_k} + \sum_{k=0}^N \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{p(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha - j)} x^{p(\alpha - j - 1)} + R_N(x), \quad (8)^1$$

$$R_N(x) = \frac{x^{\alpha p - \mu_N}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f_{N+1}(xt^{1/p}) g_N(t) t^{-\mu_N/p} dt -$$

$$- \sum_{j=0}^{\nu_{N-1}} \frac{p(-1)^j}{j! \Gamma(\alpha - j)} \left(\int_x^\infty f_{N+1}(t) t^{p(j+1) - \mu_{N-1}} dt \right) x^{p(\alpha - j - 1)}, \quad (9)$$

$$b_{jk} = \int_0^\infty f_k(t) t^{p(j+1) - \mu_{k-1}} dt, \quad k, j \in N_0, \quad (10)$$

$$\mu_{-1} = \nu_{-1} = 0, \quad \nu_k = [\mu_k/p] \quad ([] - \text{целая часть}), \quad k \in N_0, \quad (11)$$

¹⁾

$$\sum_{j=k}^n a_j = 0, \quad \text{если } n < k.$$

$$f_0(t) = f(t) - \sum_{k=-l}^{-1} a_k t^{-\nu_k}, \quad f_k(t) = t^{\nu_{k-1} - \nu_{k-2}} f_{k-1}(t) - a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Доказательство. Осуществляя замену $t = x\tau^{1/p}$ и используя первую из формул (12), перепишем интеграл (4) в виде

$$(I_{0+}^{\alpha}; x^p f)(x) = \sum_{k=-l}^{-1} \frac{\Gamma(1 - \nu_k/p) a_k}{\Gamma(1 + \alpha - \nu_k/p)} x^{\alpha p - \nu_k} + \frac{x^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha)} J(x), \quad (13)$$

где

$$J(x) = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} f_0(xt^{1/p}) dt. \quad (14)$$

Введем обозначения

$$g_{k-1}(t) = (1-t)^{\alpha-1} - \sum_{j=0}^{\nu_{k-1}-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} t^j, \quad g_k^+(t) = g_{k-1}(t) - g_k(t), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

где $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)$ — символ Похгаммера, ν_k даются (11). В частности, $g_{-1}(t) = g_0(t) + g_0^+(t) = (1-t)^{\alpha-1}$.

Если $\nu_0 - 1 \geq \nu_{-1}$, т.е. $\nu_0 \geq p$, то согласно (11) и (15)

$$g_0(t) = (1-t)^{\alpha-1} - \sum_{j=0}^{\nu_0-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} t^j, \quad g_0^+(t) = \sum_{j=0}^{\nu_0-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} t^j.$$

Так как в силу (12) $f_0(t) = t^{-\nu_0} f_1(t) + a_0$, то для интеграла (14) имеем

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^1 f_0(xt^{1/p}) [g_0(t) + g_0^+(t)] dt = x^{-\nu_0} \int_0^1 f_1(xt^{1/p}) g_0(t) t^{-\nu_0/p} dt + \\ &+ a_0 x^{-\nu_0} \int_0^1 g_0(t) t^{-\nu_0/p} dt + \int_0^1 f_0(xt^{1/p}) g_0^+(t) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Если же $\nu_0 - 1 < \nu_{-1}$, т.е. $\nu_0 < p$, то $g_0(t) = (1-t)^{\alpha-1}$, $g_0^+(t) = 0$ и для $J(x)$ также имеет место равенство (16). Продолжая этот процесс, приходим к представлению интеграла (14) в виде

$$\begin{aligned} J(x) &= x^{-\nu_N} \int_0^1 f_{N+1}(xt^{1/p}) g_N(t) t^{-\nu_N/p} dt + \\ &+ \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{x^{\nu_k}} \int_0^1 g_k(t) t^{\nu_k/p} dt + \sum_{k=0}^N \frac{1}{x^{\nu_{k-1}}} \int_0^1 f_k(xt^{1/p}) g_k^+(t) t^{-\nu_{k-1}/p} dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (12) вытекает равенство

$$f_k(t) = \sum_{m=k}^N a_m t^{-\nu_m + \nu_{k-1}} + f_{N+1}(t) t^{-\nu_N + \nu_{k-1}}. \quad (18)$$

Тогда согласно (15) и (18) получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_k(xt^{1/p}) g_k(t) t^{-\nu_{k-1}/p} dt &= \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \left[p x^{\nu_{k-1} - p(j+1)} b_{jk} + \right. \\ &+ \left. \sum_{m=k}^N \frac{a_m x^{-\nu_m + \nu_{k-1}}}{j+1 - \nu_m/p} - p x^{\nu_{k-1} - p(j+1)} \int_x^{\infty} f_{N+1}(t) t^{p(j+1) - \nu_N - 1} dt \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где b_{jk} даются (10). Подставляя (19) в (17), меняя порядок суммирования и учитывая (9), имеем

$$J(x) = \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{x^{\mu_k}} \left[\int_0^1 g_k^+(t) t^{-\mu_k/p} dt + \sum_{m=0}^k \sum_{j=\nu_{m-1}}^{\nu_m-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j! (j+1-\nu_m/p)} \right] + \\ + \sum_{k=0}^N \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{(1-\alpha)_j b_{jk}}{j! x^{p(j+1)}} + \Gamma(\alpha) R_N(x) x^{-\alpha p}.$$

Отсюда, используя (15), формулы (1.72), (1.77) из [6] и равенство $\Gamma(\alpha-j)(1-\alpha)_j = (-1)^j \Gamma(\alpha)$, получаем в силу (13), (14) формулу (8). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и

$$f(t) \sim \sum_{k=-l}^{\infty} a_k t^{-p(k+\beta)}, \quad 0 < \beta < 1, \quad l = 0, 1, \dots, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Тогда для любого натурального N

$$(I_{0+}^{\alpha}; x^p f)(x) = \sum_{k=-l}^N \frac{\Gamma(1+k-\beta) a_k}{\Gamma(1+\alpha+k-\beta)} x^{p(\alpha-k-\beta)} + \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k p b_k}{k! \Gamma(\alpha-k)} x^{p(\alpha-k-1)} + R_N(x), \quad (21)$$

где

$$R_N(x) = \frac{x^{p(\alpha-N-\beta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f_{N+1}(xt^{1/p}) g_N(t) t^{-N-\beta} dt - \\ - \sum_{j=0}^N \frac{p(-1)^j}{j! \Gamma(\alpha-j)} \left(\int_x^{\infty} f_{N+1}(t) t^{p(j+1-N-\beta)-1} dt \right) x^{p(\alpha-j-1)}, \quad (22)$$

$$b_k = \int_0^{\infty} f_{k+1}(t) t^{p(1-\beta)-1} dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (23)$$

$$f_0(t) = f(t) - \sum_{k=-l}^{-1} a_k t^{-p(k+\beta)}, \quad f_k(t) = t^p f_{k-1}(t) - a_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Замечание 1. Полагая в (8) $p=1$, получаем асимптотическое представление для дробного интеграла Римана — Лиувилля (1):

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \sum_{k=-l}^N \frac{\Gamma(1-\mu_k) a_k}{\Gamma(1+\alpha-\mu_k)} x^{\alpha-\mu_k} + \sum_{k=0}^N \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha-j)} x^{\alpha-j-1} + R_N(x), \quad (25)$$

где $R_N(x)$, b_{jk} , ν_k даются соответственно равенствами (9) — (11) с $p=1$. В случае асимптотики (20) с $p=1$ другая форма представления для $I_{0+}^{\alpha} f$ и остаточного члена $R_N(x)$ получена в [5].

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного случая асимптотики (2), когда существует по крайней мере одна такая пара $k, j \in N_0$, что $\mu_k = p(j+1)$.

Теорема 2. Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику (2), причем для некоторых $k \in N_0$ существуют такие числа $j_k \in N_0$, что $\mu_k = p(j_k+1)$. Тогда для любого натурального N справедливо

$$\begin{aligned}
(I_{0+}^k; x^p f)(x) = \ln x \sum_{k=0}^{N'} \frac{(-1)^j p a_k}{j_k! \Gamma(\alpha - j_k)} x^{p(\alpha - j_k - 1)} + \\
+ \sum_{k=0}^{N'} \frac{(-1)^j p d_k}{j_k! \Gamma(\alpha - j_k)} x^{p(\alpha - j_k - 1)} + \sum_{k=0}^N \sum_{j=v_{k-1}}^{v_k-1} \frac{(-1)^j p b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha - j)} x^{p(\alpha - j - 1)} + \\
+ \sum_{k=-l}^N c_k x^{\alpha p - \mu_k} + R_N(x), \quad (26)
\end{aligned}$$

где суммирование в $\sum'$ берется по тем $k \in N_0$, для которых существуют такие $j_k \in N_0$, что $\mu_k = p(j_k + 1)$, а в $\sum''$ — по тем $k \in N_0$, для которых $\mu_k \neq p(j + 1)$ ни при каких $j \in N_0$.

Здесь $R_N(x)$ дается формулой (9), b_{jk} , v_k , $f_k(t)$ — соотношениями (10)–(12) соответственно;

$$d_k = \int_0^1 f_k(t) t^{p(j_k+1)-\mu_{k-1}-1} dt + \int_1^\infty \left[f_k(t) t^{p(j_k+1)-\mu_{k-1}-1} - \frac{a_k}{t} \right] dt, \quad k \in N_0, \quad (27)$$

$$c_k = \frac{\Gamma(1 - \mu_k/p) a_k}{\Gamma(1 + \alpha - \mu_k/p)}, \quad k = -l, -l+1, \dots, -1,$$

$$c_k = a_k \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq v_k/p-1}}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\alpha - j) (j+1 - \mu_k/p)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, исходим из представления (17) для интеграла (14). При тех $k \in N_0$, для которых $\mu_k \neq p(j+1)$ ни при каких $j \in N_0$, справедлива оценка (19). При тех же $k \in N_0$, для которых существуют такие $j_k \in N_0$, что $\mu_k = p(j_k + 1)$, вместо (19) получаем оценку

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f_k(xt^{1/p}) g_k^+(t) t^{-\mu_{k-1}/p} dt = \\
& = \sum_{\substack{j=v_{k-1}-1 \\ j \neq \mu_k/p-1}}^{v_k-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} \left[p x^{\mu_{k-1}-p(j+1)} b_{jk} + \sum_{m=k}^N \frac{a_m x^{-\mu_m + \mu_{k-1}}}{j+1 - \mu_m/p} \right] + \\
& + \frac{(1-\alpha)_{j_k}}{j_k!} \left[p x^{\mu_{k-1}-p(j_k+1)} (a_k \ln x + d_k) + \sum_{m=k+1}^N \frac{a_m x^{-\mu_m + \mu_{k-1}}}{j_k+1 - \mu_m/p} \right] - \\
& - \sum_{j=v_{k-1}}^{v_k-1} \frac{(1-\alpha)_j}{j!} p x^{\mu_{k-1}-p(j+1)} \int_x^\infty f_{N+1}(t) t^{p(j+1)-\mu_N-1} pt, \quad (29)
\end{aligned}$$

где d_k дается (27). Подставляя оценки (19) и (29) в (17) и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, приходим к формуле (26). Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и

$$f(t) \sim \sum_{k=-l}^{\infty} a_k t^{-p(1+k)}, \quad l = 0, 1, \dots, \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (30)$$

Тогда для любого натурального N

$$(I_{0+}^{\alpha} x^p f)(x) = \ln x \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k p a_k}{k! \Gamma(\alpha - k)} x^{p(\alpha - k - 1)} + \sum_{k=-l}^N b_k x^{p(\alpha - k - 1)} + R_N(x), \quad (31)$$

где

$$R_N(x) = \frac{x^{p(\alpha - 1 - N)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f_{N+1}(xt^{1/p}) g_N(t) t^{-N-1} dt - \sum_{j=0}^N \frac{p(-1)^j}{j! \Gamma(\alpha - j)} \left(\int_x^{\infty} f_{N+1}(t) t^{p(j - N) - 1} dt \right) x^{p(\alpha - j - 1)}, \quad (32)$$

$$b_k = \frac{\Gamma(-k) a_k}{\Gamma(\alpha - k)}, \quad k = -l, -l + 1, \dots, -1, \quad (33)$$

$$b_k = a_k \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (j - k) \Gamma(\alpha - j)} + d_k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ d_k = \int_0^1 f_k(t) t^{p-1} dt + \int_1^{\infty} \left[f_k(t) t^{p-1} - \frac{a_k}{t} \right] dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (34)$$

$f_k(t)$ даются соотношениями (24) с $\beta = 1$.

Замечание 2. Полагая в (26) $p = 1$, получаем асимптотическое представление для дробного интеграла (1):

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \ln x \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^j k a_k}{j k! \Gamma(\alpha - j k)} x^{\alpha - j k - 1} + \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^j k d_k}{j k! \Gamma(\alpha - j k)} x^{\alpha - j k - 1} + \\ + \sum_{k=0}^N \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k - 1} \frac{(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha - j)} x^{\alpha - j - 1} + \sum_{k=-l}^N c_k x^{\alpha - \mu_k} + R_N(x), \quad (35)$$

где суммирование в $\sum'$, $\sum''$ берется так же, как в теореме 2, а $R_N(x)$, b_{jk} , ν_k , d_k , c_k даются соответственно равенствами (9) — (11), (27), (28) с $p = 1$. В случае асимптотики (30) с $p = 1$ другая форма представления для $I_{0+}^{\alpha} f$ и остаточного члена $R_N(x)$ получена в [5].

§ 2. Оценки для остаточных членов и асимптотические разложения одномерных дробных интегралов

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Учитывая (12), положим

$$M_N = \sup_{t \in (1/2, \infty)} |t^{\mu_{N+1} - \mu_N} f_{N+1}(t)|, \quad f_{N+1}(t) = t^{\mu_N} [f(t) - \sum_{k=-l}^N a_k t^{-\mu_k}]. \quad (36)$$

Предположим, что величина M_N конечна. Тогда из (36) вытекает, что $|f_{N+1}(t)| \leq M_N t^{-\mu_{N+1} + \mu_N}$ и, следовательно,

$$\left| \int_x^{\infty} f_{N+1}(t) t^{p(j+1) - \mu_{N+1}} dt \right| \leq \frac{M_N x^{p(j+1) - \mu_{N+1}}}{\mu_{N+1} - p(j+1)}, \quad 0 \leq j < \nu_N = [\mu_N/p]. \quad (37)$$

Согласно (15) величина $L_N = \sup_{t \in (0, 1/2)} |t^{-\nu_N} g_N(t)|$ конечна и $|g_N(t)| \leq L_N t^{\nu_N}$. Отсюда и из (36) имеем оценку

$$\left| \int_0^1 f_{N+1}(xt^{1/p}) g_N(t) t^{-\mu_N/p} dt \right| \leq M_N x^{-\mu_{N+1} + \mu_N} \int_0^1 |g_N(t)| t^{-\mu_{N+1}/p} dt + \\ + L_N x^{\mu_N - p(\nu_{N+1})} \int_0^{1/2} |f_{N+1}(t)| t^{p(\nu_{N+1}) - \mu_N - 1} dt. \quad (38)$$

Из (37), (38) получаем оценку для остаточного члена (9) представления (8):

$$|R_N(x)| \leq \frac{L_N}{\Gamma(\alpha)} x^{p(\alpha - \nu_{N-1})} \int_0^{1/2} |f_{N+1}(t)| t^{p(\nu_{N+1}) - \mu_N - 1} dt + \\ + M_N x^{\alpha p - \mu_{N+1}} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |g_N(t)| t^{-\mu_{N+1}/p} dt + \sum_{j=0}^{\nu_{N-1}} \frac{p}{j! |\Gamma(\alpha - j)| [\mu_{N+1} - p(j+1)]} \right). \quad (39)$$

Отсюда вытекает, что

$$R_N(x) = O(x^{p(\alpha - \nu_{N-1})}) + O(x^{\alpha p - \mu_{N+1}}) \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad (40)$$

и, следовательно, согласно (8) справедливо следующее асимптотическое разложение для дробного интеграла (4) при $x \rightarrow +\infty$:

$$(I_{0+}^\alpha; x^p f)(x) \sim \sum_{k=-l}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \mu_k/p) a_k}{\Gamma(1 + \alpha - \mu_k/p)} x^{\alpha p - \mu_k} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{p(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha - j)} x^{p(\alpha - j - 1)}, \quad (41)$$

где b_{jk} , ν_k даются соответственно формулами (10), (11).

В частности, если $f(t)$ имеет асимптотику (20), то для остаточного члена (22) представления (21) имеем оценку

$$|R_N(x)| \leq \frac{\tilde{L}_N}{\Gamma(\alpha)} x^{p(\alpha - N - 1)} \int_0^{1/2} |f_{N+1}(t)| t^{p(1-\beta) - 1} dt + \\ + \tilde{M}_N x^{p(\alpha - N - \beta - 1)} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |g_N(t)| t^{-N - \beta - 1} dt + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j! |\Gamma(\alpha - j)| (N + \beta - j)} \right), \quad (42)$$

где

$$\tilde{M}_N = \sup_{t \in (1/2, \infty)} |t^p f_{N+1}(t)| < +\infty, \quad f_{N+1}(t) = t^{N+\beta} [f(t) - \sum_{k=-l}^N a_k t^{-p(k+\beta)}], \quad (43)$$

$$\tilde{L}_N = \sup_{t \in (0, 1/2)} |t^{-N} g_N(t)| < +\infty.$$

Из (42) следует, что $R_N(x) = O(x^{p(\alpha - N - 1)}) + O(x^{p(\alpha - \beta - N - 1)})$ при $x \rightarrow +\infty$, и согласно (21) верно следующее асимптотическое разложение для дробного интеграла (4) при $x \rightarrow +\infty$:

$$(I_{0+}^\alpha; x^p f)(x) \sim \sum_{k=-l}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + k - \beta) a_k}{\Gamma(1 + \alpha + k - \beta)} x^{p(\alpha - k - \beta)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p b_k}{k! \Gamma(\alpha - k)} x^{p(\alpha - k - 1)}, \quad (44)$$

где постоянные b_k находятся из равенств (23), (24).

Замечание 3. В случае асимптотики (2) с $l=0$ в работе [7] получено равносильное (41) разложение

$$(I_{0+}^\alpha; x^p f)(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \mu_k/p) a_k}{\Gamma(1 + \alpha - \mu_k/p)} x^{\alpha p - \mu_k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(-1)^k \Re[f; p(k+1)]}{k! \Gamma(\alpha - k)} x^{p(\alpha - k - 1)} \quad (45)$$

при $x \rightarrow +\infty$, где $\mathfrak{M}$ — преобразование Меллина. Однако в приведенной там формуле (1.9) допущены погрешности: во втором слагаемом отсутствует множитель p и вместо знака „+“ между двумя асимптотическими рядами в (45) стоит знак „—“ (последний факт отмечен в работе [5]).

Из (25) и (40) вытекает следующее асимптотическое разложение для дробного интеграла Римана — Лиувилля (1):

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) \sim \sum_{k=-l}^{\infty} \frac{\Gamma(1-\mu_k) a_k}{\Gamma(1+\alpha-\mu_k)} x^{\alpha-\mu_k} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha-j)} x^{\alpha-j-1}, \quad (46)$$

где b_{jk} , ν_k даются соответственно формулами (10), (11) с $p=1$. В случае простейшей асимптотики (20) с $p=1$ равносильное (46) разложение получено в работе [5].

Пусть теперь функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Если $\mu_k \neq p(j+1)$ ни при каких $j \in N_0$, то для остаточного члена $R_N(x)$ представления (26) остается верна оценка (39), а следовательно, и (40). Если же существует $j_{N+1} \in N_0$ такое, что $\mu_{N+1} = p(j_{N+1} + 1)$, то из (9) получаем следующую оценку для $R_N(x)$:

$$\begin{aligned} |R_N(x)| \leq & \frac{p(|a_{N+1}| \ln x + |d_{N+1}|)}{j_{N+1}! |\Gamma(\alpha - j_{N+1})|} x^{\alpha p - \mu_{N+1}} + \\ & + x^{\alpha p - \mu_{N+1}} \left(M_N \sum_{j=0}^{\nu_{N+1}-2} \frac{p}{j! |\Gamma(\alpha - j)| |(\mu_{N+1} - p(j+1))|} + \frac{|a_{N+1}|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |g_{N+1}(t)| t^{-\mu_{N+1}/p} dt \right) + \\ & + \sum_{j=\nu_N}^{\nu_{N+1}-2} \frac{p |b_{j, N+1}|}{j! |\Gamma(\alpha - j)|} x^{p(\alpha - j - 1)} + A x^{p(\alpha - \nu_{N+1} - 1)} + B x^{\alpha p - \mu_{N+2}}, \end{aligned} \quad (47)$$

где b_{jk} , ν_{N+1} , d_{N+1} , M_N даются соответственно формулами (10), (11), (27), (36), A , B — положительные постоянные, опускаемые ввиду громоздкости. Из (39) и (47) вытекает, что при $x \rightarrow +\infty$

$$R_N(x) = \begin{cases} O(x^{p(\alpha - \nu_{N+1} - 1)}) + O(x^{\alpha p - \mu_{N+1}}), & \text{если } \mu_{N+1} \neq p(j+1) \text{ ни при каких } j \in N_0; \\ O(x^{p(\alpha - \nu_{N+1} - 1)}) + O(x^{\alpha p - \mu_{N+1}} \ln x), & \text{если } \mu_{N+1} = p(j+1) \text{ для некоторого } j \in N_0. \end{cases} \quad (48)$$

Тогда из (26) получаем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} (I_{0+}^{\alpha; x^p} f)(x) \sim & \ln x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j p a_k}{j_k! \Gamma(\alpha - j_k)} x^{p(\alpha - j_k - 1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j p d_k}{j_k! \Gamma(\alpha - j_k)} x^{p(\alpha - j_k - 1)} + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{(-1)^j b_{jk} p}{j! \Gamma(\alpha - j)} x^{p(\alpha - j - 1)} + \sum_{k=-l}^{\infty} c_k x^{\alpha p - \mu_k}, \end{aligned} \quad (49)$$

где суммирование в $\sum'$, $\sum''$ берется так же, как и в теореме 2, а b_{jk} , ν_k , d_k , c_k даются соответственно равенствами (10), (11), (27), (28).

В частности, если $f(t)$ имеет асимптотику (30), то для остаточного члена (32) представления (31) имеем оценку

$$|R_N(x)| \leq \frac{p(|a_{N+1}| \ln x + |d_{N+1}|)}{(N+1)! |\Gamma(\alpha - N - 1)|} x^{p(\alpha - N - 2)} + \left[\tilde{M}_N \sum_{j=0}^N \frac{1}{j! |\Gamma(\alpha - j)| (N+1-j)} + \right]$$

$$+ \frac{|a_{N+1}|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |g_{N+1}(t)| t^{-N-2} dt \Big] x^{p(\alpha-N-2)} + cx^{p(\alpha-N-3)}, \quad (50)$$

где d_{N+1} , $\tilde{M}_N$ находятся соответственно из равенств (34), (43), c — положительная постоянная. Из (50) вытекает, что $R_N(x) = O(x^{p(\alpha-N-2)} \ln x)$ при $x \rightarrow +\infty$, и, следовательно, верно следующее асимптотическое разложение для дробного интеграла (4):

$$(I_{0+}^\alpha; x^p f)(x) \sim \ln x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k p a_k}{k! \Gamma(\alpha - k)} x^{p(\alpha-k-1)} + \sum_{k=-l}^{\infty} b_k x^{p(\alpha-k-1)}, \quad (51)$$

где b_k даются формулами (33).

Замечание 4. В работе [7] дан первый член асимптотики (49) интеграла (4) при условии, что функция $f(t)$ имеет асимптотику (2) с $l=0$ и существует такое $m \in N_0$, что $\mu_0 = p(m+1)$.

Из (35) и (48) вытекает следующее асимптотическое разложение для дробного интеграла Римана — Лиувилля (1):

$$\begin{aligned} (I_{0+}^\alpha f)(x) \sim \ln x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j a_k}{j_k! \Gamma(\alpha - j_k)} x^{\alpha-j_k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j d_k}{j_k! \Gamma(\alpha - j_k)} x^{\alpha-j_k-1} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=v_k-1}^{v_k-1} \frac{(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha - j)} x^{\alpha-j-1} + \sum_{k=-l}^{\infty} c_k x^{\alpha-\mu_k}, \end{aligned}$$

где суммирование в $\sum'$, $\sum''$ берется так же, как в теореме 2, а b_{jk} , v_k , d_k , c_k даются соответственно формулами (10), (11), (27), (28) с $p=1$.

В заключение параграфа отметим, что правосторонний дробный интеграл (7) имеет более простую асимптотику, чем дробный интеграл (4). Непосредственно доказывается следующая

Лемма. Пусть функция $f(t)$ локально интегрируема на $(0, +\infty)$ и имеет асимптотику

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{-\mu_k}, \quad \alpha p < \mu_0 < \mu_1 < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Тогда дробный интеграл (7) имеет при $x \rightarrow +\infty$ следующее асимптотическое разложение:

$$(I_-^\alpha; x^p f)(x) = \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(-\alpha + \mu_k/p) a_k}{\Gamma(\mu_k/p)} x^{\alpha p - \mu_k} + R_N(x), \quad (52)$$

где $R_N(x) = \frac{p}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^p - x^p)^{\alpha-1} t^{p-1} \left[f(t) - \sum_{k=0}^N a_k t^{-\mu_k} \right] dt = O(x^{\alpha p - \mu_{N+1}})$ при $x \rightarrow +\infty$.

§ 3. Асимптотические разложения многомерного дробного интеграла

Используя представление (6) потенциала Рисса (5) через одномерные дробные интегралы (4) и (7) и принимая во внимание (41), (44), (49), (51) и (52), получаем следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть функция $f(|t|)$ локально интегрируема на R^n и имеет асимптотику

$$f(|t|) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k |t|^{-\mu_k} \quad \text{при } |t| \rightarrow +\infty, \quad (53)$$

$$\alpha < \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_{l-1} \leq n-2 < \mu_l < \mu_{l+1} < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = +\infty,$$

где l — целое неотрицательное фиксированное число. Если $\mu_k \neq n+2j$ ни при каких $k=l, l+1, \dots, i=0, 1, \dots$, то многомерный дробный интеграл (5) имеет при $|x| \rightarrow +\infty$ асимптотическое разложение

$$(I^\alpha f)(|x|) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma((\mu_k - \alpha)/2) \Gamma((n - \mu_k)/2)}{\Gamma(\mu_k/2) \Gamma((\alpha + n - \mu_k)/2)} |x|^{\alpha - \mu_k} + \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{2(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha/2 - j)} |x|^{\alpha - n - 2j},$$

где

$$b_{jk} = \int_0^{\infty} f_k(t) t^{2j+n-\mu_{k-1}-1} dt, \quad j=0, 1, \dots, k=l, l+1, \dots, \quad (54)$$

$$\mu_{l-1} = \nu_{l-1} = 0, \quad \nu_k = \{(\mu_k - n)/2\} + 1, \quad k=l, l+1, \dots, \quad (55)$$

$$f_l(t) = t^{n-\alpha-2} (I_{-; t^2}^{\alpha/2} f)(t) - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\Gamma((\mu_k - \alpha)/2)}{\Gamma(\mu_k/2)} a_k t^{-\mu_k + n - 2},$$

$$f_k(t) = t^{\mu_{k-1} - \mu_{k-2}} f_{k-1}(t) - a_{k-1}, \quad k=l+1, l+2, \dots \quad (56)$$

Следствие 3. Пусть функция $f(|t|)$ локально интегрируема на R^n и

$$f(|t|) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k |t|^{-2(k+\beta)}, \quad \beta > 0, \quad \text{при } |t| \rightarrow +\infty, \quad (57)$$

причем $n/2 - l < \beta < n/2 - l + 1$ для фиксированного целого неотрицательного $l \leq n/2$. Тогда многомерный дробный интеграл (5) имеет при $|x| \rightarrow +\infty$ асимптотическое разложение

$$(I^\alpha f)(|x|) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(\beta + k - \alpha/2) \Gamma(n/2 - \beta - k)}{\Gamma(\beta + k) \Gamma((n + \alpha)/2 - \beta - k)} |x|^{\alpha - 2\beta - 2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2b_k}{k! \Gamma(\alpha/2 - k)} |x|^{\alpha - n - 2k},$$

где

$$b_k = \int_0^{\infty} f_{k+l}(t) t^{n-2\beta-2l-1} dt, \quad k=0, 1, \dots,$$

$$f_l(t) = t^{n-\alpha-2} (I_{-; t^2}^{\alpha/2} f)(t) - \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\Gamma(k + \beta - \alpha/2) a_k}{\Gamma(k + \beta)} t^{-2(k+\beta) + n - 2},$$

$$f_k(t) = t^2 f_{k-1}(t) - a_{k-1}, \quad k=l, l+1, \dots \quad (58)$$

Теорема 4. Пусть функция $f(|t|)$ локально интегрируема на R^n и имеет асимптотику (53), причем для некоторых $k=l, l+1, \dots$ существуют такие целые неотрицательные числа j_k , что $\mu_k = n + 2j_k$. Тогда многомерный дробный интеграл (5) имеет при $|x| \rightarrow +\infty$ асимптотическое разложение

$$(I^\alpha f)(|x|) \sim \ln|x| \sum_{k=l}^{\infty} \frac{2(-1)^{j_k} a_k \Gamma((\mu_k - \alpha)/2)}{j_k! \Gamma(\alpha/2 - j_k) \Gamma(\mu_k/2)} |x|^{\alpha - n - 2j_k} + \\ + \sum_{k=l}^{\infty} \frac{2(-1)^{j_k} d_k}{j_k! \Gamma(\alpha/2 - j_k)} |x|^{\alpha - n - 2j_k} + \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=\nu_{k-1}}^{\nu_k-1} \frac{2(-1)^j b_{jk}}{j! \Gamma(\alpha/2 - j)} |x|^{\alpha - n - 2j} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k |x|^{\alpha - \mu_k},$$

где суммирование в $\sum'$ берется по тем $k=l, l+1, \dots$, для которых существуют такие числа $j_k \in N_0$, что $\mu_k = n + 2j_k$; а в $\sum''$ — по тем $k=l, l+1, \dots$, для которых $\mu_k \neq n + 2j$ ни при каких $j \in N_0$; $b_{jk}, \nu_k, f_k(t)$ даются соответственно равенствами (54) — (56),

$$d_k = \int_0^1 f_k(t) t^{2j_k+n-\nu_{k-1}-1} dt + \int_1^\infty \left[f_k(t) t^{2j_k+n-\nu_{k-1}-1} - \frac{\Gamma((\mu_k-\alpha)/2) a_k}{\Gamma(\mu_k/2) t} \right] dt,$$

$$c_k = \frac{\Gamma((\mu_k-\alpha)/2) \Gamma((n-\mu_k)/2)}{\Gamma(\mu_k/2) \Gamma((\alpha+n-\mu_k)/2)} a_k, \quad k=0, 1, \dots, l-1;$$

$$c_k = \frac{\Gamma((\mu_k-\alpha)/2) a_k}{\Gamma(\mu_k/2)} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq (\mu_k-n/2)}}^\infty \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\alpha/2-j) (j-(\mu_k-n)/2)}, \quad k=l, l+1, \dots$$

Следствие 4. Пусть функция $f(|t|)$ локально интегрируема на R^n и имеет асимптотику (57), причем $\beta = n/2 - l$ для некоторого целого неотрицательного l , т.е.

$$f(|t|) \sim \sum_{k=0}^\infty a_k |t|^{-2(k-l)-n} \quad \text{при } |t| \rightarrow +\infty.$$

Тогда многомерный дробный интеграл (5) имеет при $|x| \rightarrow +\infty$ асимптотическое разложение

$$(I^\alpha f)(|x|) \sim \ln|x| \sum_{k=l}^\infty \frac{2(-1)^k \Gamma(k-l+(n-\alpha)/2) a_k}{k! \Gamma(\alpha/2-k) \Gamma(k-l+n/2)} |x|^{\alpha-n-2k} + \sum_{k=0}^\infty d_k |x|^{\alpha-n-2k},$$

где

$$d_k = \frac{\Gamma(k-l+(n-\alpha)/2) \Gamma(l-k)}{\Gamma(k-l+n/2) \Gamma(\alpha/2+l-k)} a_k, \quad k=0, 1, \dots, l-1,$$

$$d_l = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{\Gamma(n/2)} a_l \sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^j}{j! j \Gamma(\alpha/2-j)} + \frac{2(-1)^l}{l! \Gamma(\alpha/2-l)} \int_0^1 \left[t f_l(t) - \frac{\Gamma((n-\alpha)/2) a_l}{\Gamma(n/2) t} \right] dt,$$

$$d_k = \frac{\Gamma(k-l+(n-\alpha)/2)}{\Gamma(k-l+n/2)} a_k \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^\infty \frac{(-1)^j}{j! (j-k) \Gamma(\alpha/2-j)} +$$

$$+ \frac{2(-1)^k}{k! \Gamma(\alpha/2-k)} \int_0^1 \left[t f_k(t) - \frac{\Gamma(k-l+(n-\alpha)/2) a_k}{\Gamma(k-l+n/2) t} \right] dt, \quad k=l+1, l+2, \dots,$$

$f_k(t)$ даются (58).

В заключение отметим, что полученные в теоремах 1—4 и следствиях 1—4 результаты можно применить для нахождения асимптотического решения (см. [6], § 16) интегральных уравнений первого рода $I_{0+}^\alpha f = g$ и $I^\alpha f = g$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Асимптотическое разложение интегралов с медленно убывающим ядром // ДАН СССР.—1959.—Т. 126.—№ 1.—С. 26—29.
2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотическое представление некоторых типов интеграла свертки // Латв. матем. ежегодник.—1970.—№ 8.—С. 223—239.
3. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов.—Т. 1: Рига, 1974.—391 с.;—Т. 3: Рига, 1981.—370 с.
4. Handelsman R. A., Lew J. S. Asymptotic expansions of a class of integral transforms via Mellin transforms // Arch. Ration. Mech. and Anal.—1969.—V. 35.—№ 5.—P. 382—396.
5. McClure J. P., Wong R. Exact remainders for asymptotic expansions of fractional integrals // J. Inst. Math. and Appl.—1979.—V. 24.—№ 2.—P. 139—147.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск, 1987.—688 с.
7. Berger N., Handelsman R. Asymptotic evaluation of fractional integral operators with applications // SIAM J. Math. Anal.—1975.—V. 6.—№ 5.—P. 766—773.
8. Рубин Б. С. Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций // Матем. заметки.—1983.—Т. 34.—№ 4.—С. 521—533.

Р. Минск

Поступила
08.07.1987