УДК 512.543.76

О.А. БАРКОВИЧ, В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ТИТСА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУПП ТИПА (2,6,2)

(Представлено академиком И.В.Гайшуном)

Белорусский государственный университет *Поступило*

В работе Титса [1] доказано, что если Γ — конечно порожденная линейная группа, то либо Γ содержит неабелеву свободную подгруппу, либо Γ является почти разрешимой. Если для произвольной группы Γ выполнено одно из указанных условий, то говорят, что Γ удовлетворяет альтернативе Титса. Произвольная обобщенная треугольная группа Γ имеет копредставление вида

$$T(n,m,l) =< a,b\,;\, a^n = b^m = R^l(a,b) = 1 >,$$

где $l \geq 2$ и $R(a,b) = a^{u_1}b^{v_1}\cdots a^{u_s}b^{v_s}$ — циклически редуцированное слово, не являющееся собственной степенью. В этом случае говорят, что группа Γ имеет тип (n, m, l).

В [2] выдвинута гипотеза, что для произвольной обобщенной треугольной группы Γ справедлива альтернатива Титса. В настоящее время эта гипотеза доказана для обобщенных треугольных групп всех типов, кроме $(2, n, 2)$ при $n = 3, 4, 5, 6. 10, 12, 15, 20, 30, 60$, $(3, 3, 2)$, $(3, 4, 2)$ и $(3, 5, 2)$ [3 – 5]. В предлагаемой работе доказывается следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $\Gamma = < a, b;\, a^2 = b^6 = R^2(a,b) = 1 >$, *где* $R(a,b) = ab^{v_1}\cdots ab^{v_s}$, $0 < v_i < 6$, $s > 4$. *Тогда* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу*.

Отметим, что если в условии теоремы положить $s \leq 4$, то Γ удовлетворяет альтернативе Титса [3]. Далее, положим $V = \sum_{i=1}^{s} v_i$. Если $(V, 6) \neq 1$, то Γ содержит неабелеву свободную подгруппу [4]. Поэтому будем считать, что $(V, 6) = 1$.

Используемые ниже сведения о характерах Фрике можно найти в [6]. Мы лишь напомним основные обозначения и необходимые нам факты. Пусть $F_2 =< g,h >$ — свободная группа. Для произвольного элемента $w = w(g, h) \in F_2$ рассмотрим регулярную функцию

$$\tau_w : SL_2(C) \times SL_2(C) \to C,\ \tau_w(A, B) = \mathrm{tr}\,(w(A, B)).$$

Тогда $\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh})$, где $Q_W(x, y, z)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Функцию τ_w обычно называют характером Фрике, а многочлен Q_W – многочленом Фрике элемента $w \in F_2$. Определим многочлен $P_n(\lambda)$ формулой $P_n(2\cos\varphi) = \sin((n+1)\varphi)/\sin\varphi$, $n \in Z$. Пусть $w = g^{\alpha}\ h^{\beta_1}\cdots g^{\alpha_s}h^{\beta_s}$ — циклически редуцированное слово в F_2 и пусть $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$. В [7] доказано, что степень $Q_W(x,y,z)$ относительно z равна s и коэффициент при z^s равен $M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{\alpha_i - 1}(x)P_{\beta_i - 1}(y)$. Далее, известно, что, для произвольных α, β, γ существуют матрицы $A, B \in SL_2(C)$ такие, что $\tau_g(A,B) = \mathrm{tr}\,A = \alpha$, $\tau_h(A,B) = \mathrm{tr}\,B = \beta$, $\tau_{gh}(A,B) = \mathrm{tr}\,AB = \gamma$. При этом группа $<A,B>$, порожденная A и B, неприводима тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\,ABA^{-1}B^{-1} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta\gamma - 2 \neq 2$. Ниже через $[A]$ будем обозначать образ матрицы $A \in SL_2(C)$ в $PSL_2(C)$. Следующая лемма характеризует элементы конечного порядка в $PSL_2(C)$.

Л е м м а 1. *Пусть* $2 < m$, $\pm E \neq X \in SL_2(C)$. *Тогда* $[X]^m = 1$ *в* $PSL_2(C)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{tr}\,X = 2\cos(r\pi/m)$ *для некоторого* $\underline{r \in \{1,\ldots, m-1\}}$.

Для доказательства теоремы построим представление ρ: Γ → $PSL_2(C)$ такое, что образ ρ(Γ) содержит неабелеву свободную подгруппу. Положим $f_R(z) = Q_R(0, \sqrt{3}, z)$. Для любого корня z_0 многочлена $f_R(z)$ найдутся матрицы A, $B \in SL_2(C)$ такие, что tr A = 0, tr $B = \sqrt{3}$, tr $AB = z_0$. Обозначим через $G(z_0)$ подгруппу в $PSL_2(C)$, порожденную элементами $[A]$, $[B]$. Группа $G(z_0)$ является эпиморфным образом Γ, поскольку, в силу леммы 1, $[A]^2 = [B]^6 = R^2([A],[B]) = 1$.

Л е м м а 2. *Многочлен $f_R(z)$ не имеет корней, равных* ±1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что -1 – корень $f_R(z)$. Пусть ε – примитивный корень из 1 степени 12. Рассмотрим представление ρ: $F_2 \to SL_2(C)$,

$$\rho(g) = A = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 1 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}, \quad \rho(h) = B = \begin{pmatrix} \varepsilon & x \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тогда tr A = 1, tr $B = \sqrt{3}$, tr $AB = x - 1$. Поэтому

$$f_R(z)(\rho) = f_R(x-1) = f_1(x) = \mathrm{tr}\, R(A, B). \tag{2}$$

Так как -1 – корень $f_R(z)$, то 0 – корень $f_1(x)$, т.е. свободный коэффициент в $f_1(x)$ равен 0. С другой стороны, свободный коэффициент в tr $R(A,B)$ равен

$$\varepsilon^{3s+V} + \varepsilon^{3s-V} = 2\cos((3s+V)\pi/6) \neq 0, \tag{3}$$

поскольку, в силу наших предположений, (6, V) = 1. Полученное противоречие показывает, что $f_R(z)$ не может иметь корень -1. Аналогично доказывается, что $f_R(z)$ не может иметь корень 1.

Л е м м а 3. *Предположим, что многочлен $f_R(z)$ имеет корень $z_0 \neq 0$. Тогда* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2, $z_0 \neq \pm 1$. Покажем, что $G(z_0)$ – неэлементарная подгруппа $PSL_2(C)$. Во-первых, $G(z_0)$ –неприводима, поскольку tr $ABA^{-1}B^{-1} - 2 = z_0^2 - 1 \neq 0$. Во-вторых, из описания конечных подгрупп в $PSL_2(C)$ [8] следует, что $G(z_0)$ бесконечна, поскольку содержит элемент $[B]$ порядка > 5. Наконец, группа $G(z_0)$ отлична от бесконечной группы диэдра, поскольку 2 из 3 чисел tr A, tr B, tr AB отличны от 0. Следовательно, $G(z_0)$ (а поэтому и Γ) содержит свободную подгруппу ранга 2. Лемма 3 доказана.

Учитывая леммы 2, 3, в дальнейшем будем считать, что

$$f_R(z) = M_R z^s, \tag{4}$$

где $M_R = \prod_{i=1}^{s} P_{v_i-1}(\sqrt{3})$.

Л е м м а 4. *В следующих случаях* Γ *содержит свободную подгруппу ранга* 2: 1) *s нечетно и существует такое i, что $v_i \in \{2, 3, 4\}$*; 2) *s четно и выполнено одно из условий: а) существует такое i, что $v_i = 3$*; б) *существуют такие i, j, что $i \neq j$ и $v_i, v_j \in \{2, 4\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при выполнении условий леммы равенство (4) не может быть выполнено. Пусть ρ – представление, определяемое (1). Из (2) и (4) получаем

$$f_1(x) = M_R(x-1)^s = \mathrm{tr}\, R(A, B), \tag{5}$$

откуда

$$M_R = 2\cos((3s + V)\pi)/6). \tag{6}$$

Если $s = 2s_1 + 1$, то

$$2\cos((6s_1 + 3 + V)\pi/6) = (-1)^{s_1+1} 2\sin(V\pi/6) = \pm 1, \tag{7}$$

так как (V, 6) = 1. Предположим, что для некоторого i имеем $v_i \in \{2, 3, 4\}$. Тогда

$$M_R = \prod_{j=1}^{s} P_{v_j-1}(2\cos\pi/6) = \beta \prod_{j\neq i} P_{v_j-1}(2\cos\pi/6) \tag{8}$$

где $\beta = 2\sin(v_i\pi/6) \in \{\pm\sqrt{3}, 2\}$. Тогда из (6) – (8) имеем, что $1/\beta \in O$, где O – кольцо целых алгебраических чисел в C – противоречие. Аналогично разбирается случай четного s.

Чтобы сформулировать следующую лемму, введем дополнительные обозначения. Пусть ε — примитивный корень из единицы степени 12. Рассмотрим пару матриц:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 1 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} \varepsilon^t & x \\ 0 & \varepsilon^{-t} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Пусть $W(A,B_t) = AB_t^{u_1} \cdots AB_t^{u_s}$, где $0 < u_i < 6$.Набор $(u_1, \ldots, u_s)$ будем рассматривать как циклически упорядоченный. Положим $L_i = |\{j \mid u_j = 1\}|$, $f_{ij} = |\{r \mid u_r = i, u_{r+1} = j\}|$. Справедливы следующие соотношения:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{5} l_i = s, \ \sum\nolimits_{i=1}^{5} f_{ij} = l_j, \ \sum\nolimits_{j=1}^{5} f_{ij} = l_i, \ i,j = 1,\ldots,5. \qquad (10)$$

Л е м м а 5. *Пусть* $g(x) = \operatorname{tr} W(A, B_t) = a_0 x^s + \ldots + a_s$. *Обозначим* $h_i = P_{i-1}(\varepsilon^t + \varepsilon^{-t})$. *Тогда* $a_0 = \prod\nolimits_{i=1}^{s} h_i$,

$$a_2 = a_0 \sum_{i=1}^{5} \frac{f_{ii}}{h_i}\left(\frac{l_i - 2}{h_i} + \sum_{j \neq i} \frac{l_j \varepsilon^{ti-tj}}{h_j}\right) + a_0 \sum_{i \neq j} \frac{f_{ij}}{h_i}\left(\frac{l_i - 1}{h_i} + \frac{(l_j - 1)\varepsilon^{ti-tj}}{h_j} + \sum_{k \neq i, k \neq j} \frac{l_k \varepsilon^{ti-tk}}{h_k}\right) -$$
$$a_0\left(\sum_{i=1}^{5} \frac{l_i(l_i-1)}{2h_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{l_i l_j(\varepsilon^{ti+tj} + \varepsilon^{-ti-tj})}{h_i h_j}\right). \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Рассмотрим вначале случай, когда s четно. В этом случае $u_i \in \{1, 5\}$ для любого i. Учитывая лемму 4, будем предполагать, что

$$f_R(z) = z^s \qquad (12)$$

Рассмотрим представление ρ: $F_2 \to SL_2(C)$: $\rho(g) = A$, $\rho(h) = B_1$. Тогда

$$f_1(x) = \operatorname{tr} R(A, B_1) = (x-1)^s. \qquad (13)$$

Из (10) получаем $f_{15} = f_{51}$. Далее, по лемме 5, коэффициент a_2 при x^{s-2} в $f_1(x)$ равен:

$$a_2 = f_{11}(l_1 - 2 + l_5\varepsilon^{-4}) + f_{15}((l_1-1)(1+\varepsilon^4) + (l_5-1)(1+\varepsilon^{-4})) + f_{55}(l_1\varepsilon^4 + l_5 - 2) -$$
$$l_1(l_1-1)/2 - l_5(l_5-1)/2 + 2l_1l_5 = 3f_{15} + s^2/2 - 3s/2. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) получаем $s(s-1)/2 = 3f_{15} + s^2/2 - 3s/2$, или

$$s = 3f_{15}. \qquad (15)$$

Рассмотрим теперь эпиморфный образ $\Gamma_1 = < c, d;\ c^2 = d^3 = R^2(c, d) = 1>$ группы Γ, где $R(c,d) = cd^{v_1} \cdots cd^{v_s}$. В свободном произведении $< c;\ c^2 = 1 >*< d;\ d^3 = 1 >$ слово $R(c, d)$ можно записать в виде $R_1(c,d) = cd^{u_1} \cdots cd^{u_s}$, где $u_i = 1$, если $v_i = 1$, и $u_i = 2$, если $v_i = 5$. Пусть $U = \sum\nolimits_{i=1}^{s} u_i$. Тогда $(3, U) = 1$. Положим $P(z) = \tau_{R_1}(0,1,z)$.

Л е м м а 6. *Если многочлен* $P(z)$ *имеет корень* z_0, *отличный от* 0, ± 1, $\pm\sqrt{2}$, $(\pm 1 \pm \sqrt{5})/2$, $\pm\sqrt{3}$, *то группа* Γ_1, *а следовательно и* Γ, *содержит неабелеву свободную подгруппу*.

Доказательство леммы 6 полностью аналогично доказательству леммы 3.

Учитывая лемму 6 и то, что $P(z)$ имеет целые коэффициенты, мы можем предполагать, что многочлен $P(z)$ имеет вид:

$$P(z) = z^{\alpha_1}(z^2-1)^{\alpha_2}(z^2-2)^{\alpha_3}(z^2-z-1)^{\alpha_4}(z^2+z-1)^{\alpha_5}(z^2-3)^{\alpha_6}. \qquad (16)$$

Рассмотрим представление $\rho: F_2 \to SL_2(C)$, $g \mapsto A$, $h \mapsto B_2$, где B_2 определено в (9). Тогда $\operatorname{tr} A = 0$, $\operatorname{tr} B_2 = 1$, $\operatorname{tr} AB_2 = x - \sqrt{3}$, следовательно,

$$P_1(x) = \tau_{R_1}(0,1,z)(\rho) = P(x-\sqrt{3}) = (x-\sqrt{3})^{\alpha_1}(x - 2\sqrt{3}x + 2)^{\alpha_2}(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)^{\alpha_3}$$
$$(x^2 - (2\sqrt{3}+1)x + 2 + \sqrt{3})^{\alpha_4}(x^2 - (2\sqrt{3}-1)x + 2 - \sqrt{3})^{\alpha_5}(x - 2\sqrt{3})^{\alpha_6} x^{\alpha_6} = \operatorname{tr} R_1(A, B_2). \qquad (17)$$

Свободный коэффициент многочлена tr $R_1(A,B_2)$ равен $\varepsilon^{3s+2U} + \varepsilon^{-3s-2U} = \pm\sqrt{3}$, поскольку s

нечетно и $(3,U)=1$. Сравнивая в (17) свободные коэффициенты в левой и правой части, получаем $\alpha_6=0$ и $(-\sqrt{3})^{\alpha_1}2^{\alpha_2}(2+\sqrt{3})^{\alpha_4}(2-\sqrt{3})^{\alpha_5}=\pm\sqrt{3}$. Следовательно, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$, $\alpha_4=\alpha_5$. Это означает, что

$$P_1(x)=(x-\sqrt{3})(x^2-2\sqrt{3}+1)^{\alpha_3}(x^4-4\sqrt{3}x^3+15x^2-6\sqrt{3}x+1)^{\alpha_4}. \tag{18}$$

В частности,

$$2\alpha_3+4\alpha_4+1=s. \tag{19}$$

Коэффициент при x^{s-2} в $P_1(x)$ равен

$$a_2=3s^2/2-5s/2+1+\alpha_4. \tag{20}$$

С другой стороны, в силу леммы 5 и соотношений (10), коэффициент при x^{s-2} в многочлене $\operatorname{tr}R_1(A,B_2)$ равен

$$\begin{gathered}f_{11}^{'}(l_1^{'}-2+l_2^{'}\varepsilon^{-2})+f_{12}^{'}(l_1^{'}-1+(l_2^{'}-1)\varepsilon^{-2})+f_{21}^{'}((l_1^{'}-1)\varepsilon^2+l_2^{'}-1)+f_{22}^{'}(l_1^{'}\varepsilon^2+l_2^{'}-2)+\\ l_1^{'}(l_1^{'}-1)/2+l_2^{'}(l_2^{'}-1)/2+2l_1^{'}l_2^{'}=f_{12}^{'}+3s^2/2-5s/2,\end{gathered} \tag{21}$$

где $f_{11}^{'}=f_{11}$, $f_{12}^{'}=f_{15}$, $f_{21}^{'}=f_{51}$, $f_{22}^{'}=f_{55}$, $l_1^{'}=l_1$, $l_2^{'}=l_5$. Из (19) – (21) получаем

$$f_{15}=1+\alpha_4. \tag{22}$$

Из (15), (19) и (22) следует

$$2\alpha_3+s/3-3=0. \tag{23}$$

Так как $\alpha_3\ge 0$, то (27) влечет $s/3-3\le 0$, т.е. $s\le 9$. Таким образом, если $s>9$, то многочлены $f_R(z)$ и $P(z)$ не могут одновременно иметь вид, определяемый формулами (4) и (16) соответственно, откуда, в силу лемм 3 и 6, следует утверждение теоремы.

Если $s\le 9$, то из (15) следует, что $3\,|\,s$ и так как $s>4$ и s нечетно, то мы должны иметь $s=9$, $f_{15}=3$. Непосредственные вычисления показывают, что с точностью до эквивалентности имеется единственное слово $R=ababab^5ab^5abab^5ababab^5$ такое, что $f_R(z)=z^9$. Доказательство теоремы в случае нечетного s завершает следующая лемма.

Л е м м а 7. *Группа* $\Gamma=<a,b;a^2=b^6=R^2(a,b)=1>$ *содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим группу диэдра $D_3=<c,d;c^2=d^2=(cd)^3=1>$ порядка 6 и эпиморфизм $\alpha:\Gamma\to D_3$, $a\mapsto c$, $b\mapsto d$. Пусть Γ_1 = Ker $\alpha\subset\Gamma$. Тогда Γ_1 – подгруппа индекса 6 в Γ и, применяя метод Райдемайстера–Шрайера, находим, что

$$\begin{gathered}\Gamma_1=<g_1,g_2,g_3,g_4\,|\,g_1^3=g_2^3=(g_3g_4)^3=(g_3^2g_4^{-1})^2=(g_3^{-1}g_4^2)^2=\\ R_1^2(g_1,g_2,g_4)=R_1^2(g_2,g_1,g_3)=R_2^2(g_1,g_2,g_3)=R_2^2(g_2,g_4,g_1)=1>,\end{gathered}$$

где $R_1(g,h,t)=tgh^2tgh^2th^2$, $R_2(g,h,t)=t^{-1}gt^{-1}gt^{-1}gh^2$. Для доказательства леммы 7 нам достаточно построить представление $\varphi:\Gamma_1\to PSL_2(C)$ с неэлементарным образом. Рассмотрим матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix}x_1 & (-x_1^2+x_1-1)/y_1\\ y_1 & 1-x_1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}x_2 & (-x_2^2+x_2-1)/y_2\\ y_2 & 1-x_2\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}i & -1\\ 0 & -i\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда, в силу леммы 1, $[A_1]^3=[A_2]^3=([A_3][A_4])^3=([A_3]^2[A_4]^{-1})^2=([A_3]^{-1}[A_4])^2=1$ в $PSL_2(C)$. Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\operatorname{tr}A_1A_3=\operatorname{tr}A_2A_4=\sqrt{2},\qquad \operatorname{tr}A_2A_3=\operatorname{tr}A_1A_4, \tag{24}$$

а также

$$\text{tr } R_1(A_1, A_2, A_4) = \text{tr } R_1(A_2, A_1, A_3) = \text{tr } R_2(A_1, A_2, A_3) = \text{tr } R_2(A_2, A_4, A_1) = 0. \qquad (25)$$

Из (24) получаем

$$y_1 = 2ix_1 - \sqrt{2} - i,\; y_2 = \frac{3ix_1^2 - (2\sqrt{2} + 3i)x_1 + \sqrt{2} + \frac{1}{3}i}{2x_1 + i\sqrt{2} - 1},\; x_2 = \frac{3x_1^2 + (-2 + 3i\sqrt{2})x_1 - \frac{4}{3} - i\sqrt{2}}{2x_1 + i\sqrt{2} - 1}. \qquad (26)$$

Тогда, выполняя вычисления в (25), находим

$$\text{tr } R_1(A_1, A_2, A_4) = \text{tr } \boldsymbol{R_1(A_1, A\;\;, A_4) =}\; f_1(x_1)/(2x_1 + i\sqrt{2} - 1)^4,$$

$$\text{tr } R_2(A_1, A_2, A_3) = \text{tr } R_2(A_2, A_4, A_1) = f_2(x_1)/(2x_1 + i\sqrt{2} - 1)^2,$$

где

$$f_1(x_1) = -24i + \frac{137\sqrt{2}}{9} - (\frac{184i}{3} + \frac{424\sqrt{2}}{3})x_1 + (\frac{1790i}{3} + 22\sqrt{2})x_1^2 + (-329i + 683\sqrt{2})x_1^3 -$$
$$(975i + 446\sqrt{2})x_1^4 + (648i - 420\sqrt{2})x_1^5 + (-198i + 261\sqrt{2})x_1^6 + (-108i + 18\sqrt{2})x_1^7 - 9\sqrt{2}x_1^8,$$

$$f_2(x_1) = 3\sqrt{2} + 4i/3 + (4\sqrt{2} - 16i)x_1 + (-10\sqrt{2} + 18i)x_1^2 + (-9\sqrt{2} + 3i)x_1^3 - 3ix_1^4.$$

Непосредственная проверка показывает, что f_2 делит f_1. Пусть x_1 – какой-либо корень уравнения $f_2 = 0$, а x_2, y_1, y_2 определяются условиями (26). Тогда (x_1, x_2, y_1, y_2) решение систем (24) и (25). Четверка матриц A_1, A_2, A_3, A_4 определяет представление $\varphi : \Gamma_1 \to PSL_2(C)$. Покажем, что $\varphi(\Gamma_1)$ содержит неабелеву свободную подгруппу Рассмотрим группу $G = <[A_1A_3],[A_2A_4]>$. По построению имеем $\text{tr } A_1A_3 = \text{tr } A_2A_4 = \sqrt{2}$. Далее,

$$\text{tr } A_1A_3A_2A_4 = f_3(x_1)/(2x_1 + i\sqrt{2} - 1)^2,$$

где $f_3(x_1) = -3x_1^4 + (6 - 6\sqrt{2}i)x_1^3 + (11 - 9\sqrt{2}i)x_1^2 + (5\sqrt{2}i - 14)x_1 - 4\sqrt{2}i - 1/3$. Непосредственные вычисления показывают, что 0, 1, 2 не являются корнями $f_3(x_1)$. Это означает, что G (а следовательно и $\varphi(\Gamma_1)$) – неэлементарная подгруппа $PSL_2(C)$, что и завершает доказательство леммы 7.

Рассмотрим теперь случай, когда s четно. Учитывая лемму 4 и то, что (6, V) = 1, мы без ограничения общности можем предполагать (применяя при необходимости к слову R циклическую перестановку и автоморфизм $b \mapsto b^{-1}$ циклической группы порядка 6), что $R = ab^{v_1}ab^{v_2}\cdots ab^{v_s}$, где $v_1 = 2$, $v_i \in \{1,5\}$ при i = 2,…, s. В силу лемм 2 и 3 можно считать, что $f_R(z) = \sqrt{3}z^s$. Рассмотрим представление $\rho : F_2 \to SL_2(C)$, определяемое (1). Тогда

$$f_1(x) = f_R(z)(\rho) = \text{tr } R(A, B) = \sqrt{3}(x-1)^s.$$

Сохраняя обозначения (9), из системы (10) получим

$$\begin{aligned} &f_{25} = 1 - f_{21},\; f_{52} = 1 - f_{12},\; f_{11} = l_1 - f_{12} - f_{15},\; f_{55} = s - l_1 - 2 - f_{15} + f_{21}, \\ &l_5 = s - l_1 - 1,\; f_{51} = f_{12} + f_{15} - f_{21}. \end{aligned} \qquad (27)$$

С одной стороны, коэффициент a_2 при x^{s-2} в $f_1(x)$ равен $\sqrt{3}s(s-1)/2$. С другой стороны, вычисляя a_2 при помощи леммы 5 и приравнивая полученные выражения, получаем:

$$s + 2f_{21} - f_{12} - 3f_{15} - 2 = 0. \qquad (28)$$

Теперь рассмотрим эпиморфный образ Γ_1 = < c, d; $c^2 = d^3 = R_1^2(c, d) = 1$> группы Γ, где $R_1(c,d) = cd^{u_1} \cdots cd^{u_s}$, а $u_i = 1$, если $v_i = 1$, и $u_i = 2$, если $v_i = 5$. Пусть $U = \sum_{i=1}^{s} u_i$. Тогда (3, U) = 1. Положим $P(z) = \tau_{R_1}(0,1,z)$. Как и в случае нечетного s можно доказать, что если $P(z)$ не имеет вид

$$P(z) = (z^2 - 2)^{\alpha_3}(z^2 - z - 1)^{\alpha_4}(z^2 + z - 1)^{\alpha_4}. \qquad (29)$$

Рассматривая представление $\rho : F_2 \to SL_2(C)$, $g \mapsto A$, $h \mapsto B_2$, где B_2 определено в (9), получаем

$$P_1(x) = P(x - \sqrt{3}) = \sqrt{3}(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)^{\alpha_3}(x^4 - 4\sqrt{3}x^3 + 15x^2 - 6\sqrt{3}x + 1)^{\alpha_4} = \mathrm{tr}\, R_1(A, B_2). \qquad (30)$$

В частности,

$$2\alpha_3 + 4\alpha_4 = s. \qquad (31)$$

С одной стороны, коэффициент a_2 при x^{s-2} в $P_1(x)$ равен $a_2 = 3s^2/2 - 5s/2 + \alpha_4$. С другой стороны, вычисляя a_2 при помощи леммы 5 и приравнивая полученные выражения, получаем:

$$f_{12} + f_{15} - \alpha_4 = 0. \qquad (32)$$

Из (28), (31) и (32) следует

$$1 - f_{21} - \frac{1}{2}f_{15} - \frac{3}{2}f_{12} - f_{21} - \alpha_3 = 0. \qquad (33)$$

Так как $s \geq 6$, то (33) влечет $f_{15} = 2$, $f_{12} = f_{21} = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 2$, $s = 8$. Однако, если $s = 8$, то непосредственные вычисления показывают, что не существует слов R таких, что $f_R(z) = \sqrt{3}z^8$. Теорема доказана.

Литература

1. T i t s J. // J. Algebra. 1972. Vol. 20. P. 250 – 270.
2. R o s e n b e r g e r G. // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 2. С. 227 – 240.
3. F i n e B., R o s e n b e r g e r G. Algebraic generalizations of discrete groups: a path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker, 1999.
4. Б е н я ш-К р и в е ц В.В. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 2. С. 29 – 32.
5. Б е н я ш-К р и в е ц В.В. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 3. С. 14 – 17.
6. C u l l e r M., S h a l e n P. // Ann. of Math. 1983. Vol. 117. P. 109 – 147.
7. T r a i n a C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 79. P. 369 – 372.
8. M a j e e d A., M a s o n A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45 – 48.

BARKOVICH O.A., BENYASH-KRIVETS V.V.

ON THE TITS ALTERNATIVE FOR GRNERALIZED TRIANGLE GROUPS OF TYPE (2, 6, 2)

Summary

The validity of the Tits alternative for generalized triangle groups of type (2, 6, 2) is proved.

УДК 512.543.76

Баркович О.А., Беняш-Кривец В.В. Об альтернативе Титса для обобщенных треугольных групп типа (2, 6, 2). // Доклады Национальной академии наук Беларуси.

В работе исследуется справедливость альтернативы Титса для обобщенных треугольных групп типа (2, 6, 2). Доказана следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $\Gamma = < a, b; a^2 = b^6 = R^2(a,b) = 1 >$, *где* $R(a,b) = ab^{v_1} \cdots ab^{v_s}$, $0 < v_i < 6$, $s > 4$. *Тогда* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу*.

Библиогр. — 8 назв.

Barkovich O. A., Beniash-Kryvets V. V. On the Tits alternative for generalized triangle groups of type (2, 6, 2).

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры Белорусского государственного университета.
Домашний адрес: 220098 Минск, ул. Рафиева, д. 97, кв. 224.
Домашний телефон: 274-73-36.