

УДК 517.983, 517.948

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В ЯДРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Килбас, Н. В. Князюк

Белорусский государственный университет
e-mail: anatolykilbas@gmail.com, kniaziuknataly@tut.by
Поступила 14.02.2008

Исследуется интегральное уравнение первого рода с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера в ядре на полуоси. Доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости рассматриваемого уравнения в весовом пространстве суммируемых функций и получено его решение в замкнутой форме.

Пусть $E_{\rho,\mu}^{\gamma}(z)$ — обобщенная функция Миттаг-Леффлера, определяемая для действительных $\rho, \mu, \gamma \in \mathbb{R} (\rho > 0)$ следующим степенным рядом [1]:

$$E_{\rho,\mu}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(\rho k + \mu)} \frac{z^k}{k!}, \quad (1)$$

где $(\gamma)_k$ — символ Похгаммера

$$(\gamma)_0 = 1, \quad (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+k-1) \quad (k=1, 2, \dots).$$

В частности, при $\gamma = 1$ функция $E_{\rho,\mu}^{\gamma}(z)$ совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_{\rho,\mu}(z)$ [2]:

$$E_{\rho,\mu}^1(z) \equiv E_{\rho,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + \mu)} \quad (\rho, \mu \in \mathbb{R}, \rho > 0). \quad (2)$$

Для $\rho = 1$ обобщенная функция Миттаг-Леффлера (1) совпадает с гипергеометрической функцией Куммера [3]

$$\Phi(\gamma, \mu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k}{(\mu)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (\gamma, \mu \in \mathbb{R}) \quad (3)$$

с точностью до множителя $[\Gamma(\mu)]^{-1}$:

$$E_{1,\mu}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \Phi(\gamma, \mu; z).$$

В работе [1] изучены свойства обобщенной функции Миттаг-Леффлера (1) и интегрального оператора, содержащего функцию $E_{\rho,\mu}^{\gamma}(z)$ в ядре на конечном отрезке $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, действительной оси:

$$(E_{\rho,\mu,\omega;a+}^{\gamma} \psi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\mu-1} E_{\rho,\mu}^{\gamma}[\omega(x-t)^{\rho}] \psi(t) dt \quad (x > a), \quad (4)$$
$$(\rho, \mu, \gamma, \omega \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\rho) > 0, \operatorname{Re}(\mu) > 0),$$

в которой применялись полученные результаты для доказательства существования единственного решения соответствующего интегрального уравнения первого рода

$$\int_a^x (x-t)^{\mu-1} E_{\rho,\mu}^\gamma [\omega(x-t)^\rho] \psi(t) dt = f(x) \quad (a < x < b). \quad (5)$$

Свойства обобщенной функции Миттаг-Леффлера (1), а также интегрального оператора (4) исследовались в работе [4].

Рассмотрим интегральный оператор с функцией Миттаг-Леффлера (1) в ядре на полуоси (a, ∞) , $a > 0$,

$$(E_{\rho,\mu,\omega;-}^\gamma \psi)(x) = \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{\mu-1} E_{\rho,\mu}^\gamma \left[\omega \left(\frac{t-x}{tx} \right)^\rho \right] \frac{\psi(t) dt}{t^2} \quad (x > a), \quad (6)$$

где $\rho, \mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$, $\mu > 0$). В работе [5] изучены композиционные свойства интегрального оператора (6) с операторами правостороннего дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля $I_{b-}^\alpha y$ и $D_{b-}^\alpha y$ на конечном или полубесконечном интервале $[a, b]$, $-\infty \leq a < b < \infty$, действительной оси [6, § 2.2, 2.4, 5.1]:

$$(I_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b \leq \infty; \alpha > 0), \quad (7)$$

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) = \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} y)(x) \quad (x < b \leq \infty; \alpha > 0, n = [\alpha] + 1), \quad (8)$$

где $[\alpha]$ — целая часть α , а также выведена формула композиции двух операторов (6) с различными параметрами [5].

В статье [7] приведены некоторые свойства интегрального оператора $E_{\rho,\mu,\omega;-}^\gamma$, в том числе и свойства композиций с модифицированным дробным интегралом $J_-^\alpha \psi$ и модифицированной дробной производной $D_-^\alpha y$ на полуоси (a, ∞) , $a > 0$. Такие конструкции определяются соответственно формулами [8]:

$$(J_-^\alpha \psi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi(t) dt}{t^2} \quad (x > a; \alpha > 0), \quad (9)$$

$$(D_-^\alpha y)(x) = \left(-x^2 \frac{d}{dx} \right)^n (J_-^{n-\alpha} y)(x) \quad (x > a; \alpha > 0, n = [\alpha] + 1). \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) являются модификациями классических правосторонних дробных интегралов и производных вида (7) и (8), в которых интегрирование от x до b заменено интегрированием от x до бесконечности [6, § 5.1]. Заметим, что если $\gamma = 0$, то имеет место равенство

$$E_{\rho,\mu}^0(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}, \quad (11)$$

и, следовательно,

$$(E_{\rho,\mu,\omega;-}^0 \varphi)(x) = (J_-^\mu \varphi)(x). \quad (12)$$

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию интегрального оператора (6) на положительной полуоси (a, ∞) , $a > 0$. Мы докажем, что интегральный оператор $E_{\rho,\mu,\omega;-}^\gamma$

обратим в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty) := L((a, \infty); x^{-2})$ измеримых по Лебегу функций $y(x)$ на полуоси (a, ∞) , $a > 0$, с весом x^{-2} :

$$\mathcal{L}(a, \infty) := \left\{ y : \|y\|_{\mathcal{L}(a, \infty)} = \int_a^\infty x^{-2} |y(x)| dx < \infty \right\} \quad (13)$$

и построим для него левый обратный оператор. Получим необходимые и достаточные условия разрешимости интегрального уравнения первого рода следующего вида:

$$\int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^\gamma \left[\omega \left(\frac{t-x}{tx} \right)^\rho \right] \frac{\psi(t) dt}{t^2} = f(x) \quad (x > a), \quad (14)$$

а также запишем решение этого уравнения в замкнутой форме. В частности, соответствующие результаты получены для интегрального оператора с функцией Миттаг-Леффлера (2) в ядре

$$(E_{\rho, \mu, \omega; -} \psi)(x) = \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{\mu-1} E_{\rho, \mu} \left[\omega \left(\frac{t-x}{tx} \right)^\rho \right] \frac{\psi(t) dt}{t^2} \quad (x > a) \quad (15)$$

и для интегрального оператора с гипергеометрической функцией Куммера (3) в ядре

$$(\Phi_{\gamma, \mu, \omega; -} \psi)(x) = \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{\mu-1} \Phi \left[\gamma, \mu; \omega \left(\frac{t-x}{tx} \right) \right] \frac{\psi(t) dt}{t^2} \quad (x > a). \quad (16)$$

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1 [7, лемма 7]. Пусть $\rho, \mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$, $\mu > 0$). Тогда оператор $E_{\rho, \mu, \omega; -}^\gamma$ ограничен в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$ и

$$\|E_{\rho, \mu, \omega; -}^\gamma \varphi\|_{\mathcal{L}(a, \infty)} \leq B \|\varphi\|_{\mathcal{L}(a, \infty)}, \quad (17)$$

где

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(\gamma)_k|}{|\Gamma(\rho k + \mu + 1)|} \frac{|\omega|^k}{a^{\rho k + \mu k} k!}.$$

Следствие 1. Пусть $\rho, \mu, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$, $\mu > 0$). Тогда оператор $E_{\rho, \mu, \omega; -}$ ограничен в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$ и

$$\|E_{\rho, \mu, \omega; -} \varphi\|_{\mathcal{L}(a, \infty)} \leq B_1 \|\varphi\|_{\mathcal{L}(a, \infty)},$$

где

$$B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\omega|^k}{|\Gamma(\rho k + \mu + 1)| a^{\rho k + \mu k} k!}.$$

Следствие 2. Пусть $\mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\mu > 0$). Тогда оператор $\Phi_{\gamma, \mu, \omega; -}$ ограничен в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$ и

$$\|\Phi_{\gamma, \mu, \omega; -} \varphi\|_{\mathcal{L}(a, \infty)} \leq B_2 \|\varphi\|_{\mathcal{L}(a, \infty)},$$

где

$$B_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|(\gamma)_k| |\omega|^k}{|\Gamma(k + \mu + 1)| a^{k + \mu k} k!}.$$

Имеет место следующее утверждение для двух интегральных операторов (6) с различными параметрами.

Лемма 2 [7, лемма 11]. Если $\rho, \mu, \gamma, \omega, \nu, \sigma \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0, \mu > 0, \nu > 0$), то

$$E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{\sigma} \varphi = E_{\rho, \mu + \nu, \omega; -}^{\gamma + \sigma} \varphi \quad (18)$$

верно для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}(a, \infty)$.

В частности,

$$E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} \varphi = J_{-}^{\mu + \nu} \varphi. \quad (19)$$

Следствие 3. Если $\rho, \mu, \omega, \nu \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0, \mu > 0, \nu > 0$), то

$$E_{\rho, \mu, \omega; -}^1 E_{\rho, \nu, \omega; -}^1 \varphi = E_{\rho, \mu + \nu, \omega; -}^2 \varphi$$

верно для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}(a, \infty)$.

Следствие 4. Если $\mu, \omega, \nu, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ ($\mu > 0, \nu > 0$), то

$$\Phi_{\gamma, \mu, \omega; -} \Phi_{\sigma, \nu, \omega; -} \varphi = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu + \nu)} \Phi_{\gamma + \sigma, \mu + \nu, \omega; -} \varphi$$

верно для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}(a, \infty)$.

Для модифицированного дробного интеграла (9) и модифицированной дробной производной (10) справедливо следующее утверждение.

Лемма 3 [8, лемма 3]. Если $\alpha > \beta > 0$, то для $g \in \mathcal{L}(a, \infty)$ справедливо равенство

$$D_{-}^{\beta} J_{-}^{\alpha} g = J_{-}^{\alpha - \beta} g. \quad (20)$$

В частности,

$$D_{-}^{\alpha} J_{-}^{\alpha} g = g, \quad g \in \mathcal{L}(a, \infty). \quad (21)$$

Теорема 1. Пусть $\rho, \mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0, \mu > 0$). Тогда оператор $E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}$ обратим в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$ и для функции $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$ его левый обратный оператор задается следующим равенством:

$$([E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}]^{-1} f)(x) = (D_{-}^{\mu + \nu} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f)(x), \quad (22)$$

где $\nu > 0$.

Доказательство. Сначала построим оператор $[E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}]^{-1}$. Пусть для функции $\varphi \in \mathcal{L}(a, \infty)$ выполняется равенство

$$(E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma} \varphi)(x) = f(x). \quad (23)$$

Так как по лемме 1 оператор $E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}$ ограничен в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$, то, следовательно, функция $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$. Для любого $\nu > 0$ применим оператор $E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma}$ к уравнению (23) и, воспользовавшись равенством (19), получим

$$(J_{-}^{\mu + \nu} \varphi)(x) = (E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f)(x).$$

Так как $\mu + \nu > 0$ и $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$, то из ограниченности оператора $E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma}$ следует, что $E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f \in \mathcal{L}(a, \infty)$. Учитывая (21) и применяя оператор $D_{-}^{\mu + \nu}$ к последнему выражению, получим

$$\varphi(x) = (D_{-}^{\mu + \nu} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f)(x). \quad (24)$$

Обозначим через $[E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}]^{-1}$ оператор в правой части (24) и покажем, что он является левым обратным к $E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}$. Согласно (19) и (21) получим для любой функции $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$

$$[E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}]^{-1} E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma} f = D_{-}^{\mu + \nu} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma} f = D_{-}^{\mu + \nu} J_{-}^{\mu + \nu} f = f.$$

Это означает, что $[E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}]^{-1}$ является левым обратным к $E_{\rho, \mu, \omega; -}^{\gamma}$ в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$.

Следствие 5. Пусть $\rho, \mu, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$, $\mu > 0$). Тогда оператор $E_{\rho, \mu, \omega; -}$ обратим в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$ и его левый обратный оператор задается следующим равенством:

$$([E_{\rho, \mu, \omega; -}]^{-1}f)(x) = (D_-^{\mu+\nu} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-1}f)(x),$$

для любой функции $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$ и для любого $\nu > 0$.

Следствие 6. Пусть $\mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\mu > 0$). Тогда оператор $\Phi_{\gamma, \mu, \omega; -}$ обратим в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$ и его левый обратный оператор имеет вид

$$([\Phi_{\gamma, \mu, \omega; -}]^{-1}f)(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\nu)} (D_-^{\mu+\nu} \Phi_{\gamma, \nu, \omega; -}f)(x),$$

для любой функции $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$ и для любого $\nu > 0$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{AC}[a, \infty)$ абсолютно непрерывных функций $g(x)$ на (a, ∞) , $a > 0$, которое описывается следующим образом [8]:

$$g(x) \in \mathcal{AC}[a, \infty) \iff g(x) = c + \int_x^\infty \frac{\psi(t) dt}{t^2} \quad (\psi \in \mathcal{L}(a, \infty)), \quad (25)$$

где c — произвольная постоянная.

Теорема 2. Пусть $\rho, \mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$, $0 < \mu < 1$). Для того чтобы интегральное уравнение (14) было разрешимо в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f)(x) \in \mathcal{AC}[a, \infty), \quad (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f)(\infty) = 0, \quad (26)$$

для любого $0 < \nu < 1 - \mu$. Тогда единственное решение $\psi(x) \in \mathcal{L}(a, \infty)$ уравнения (14) имеет вид (24).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{L}(a, \infty)$ является решением уравнения (14). Согласно (6), перепишем (14) в виде

$$(E_{\rho, \mu, \omega; -}^\gamma \psi)(x) = f(x). \quad (27)$$

Так как по лемме 1 оператор $E_{\rho, \mu, \omega; -}^\gamma$ ограничен в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$, то, следовательно, функция $f \in \mathcal{L}(a, \infty)$. Для любого $0 < \nu < 1 - \mu$ применим оператор $E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma}$ к уравнению (27) и, воспользовавшись равенством (19), получим следующее уравнение:

$$(J_-^{\mu+\nu} \psi)(x) = (E_{\rho, \nu, \omega; -}^{-\gamma} f)(x), \quad x > a \quad (a > 0). \quad (28)$$

Уравнение (28) разрешимо в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$. Учитывая (6) и (9), запишем (28) в виде

$$\frac{1}{\Gamma(\mu + \nu)} \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\mu+\nu-1} \frac{\psi(t) dt}{t^2} = \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\nu-1} E_{\rho, \nu}^{-\gamma} \left[\omega \left(\frac{t-x}{tx}\right)^\rho \right] \frac{f(t) dt}{t^2}. \quad (29)$$

В (29) поменяв x на t и t на s соответственно, умножив обе части равенства на

$$\left(\frac{t-x}{tx}\right)^{-\mu-\nu} \frac{1}{t^2}$$

и проинтегрировав от x до ∞ , получим

$$\frac{1}{\Gamma(\mu + \nu)} \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx}\right)^{-\mu-\nu} \frac{dt}{t^2} \int_t^\infty \left(\frac{s-t}{st}\right)^{\mu+\nu-1} \frac{\psi(s) ds}{s^2} =$$

$$= \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{-\mu-\nu} \frac{dt}{t^2} \int_t^\infty \left(\frac{s-t}{st} \right)^{\nu-1} E_{\rho,\nu}^{-\gamma} \left[\omega \left(\frac{s-t}{st} \right)^\rho \right] \frac{f(s) ds}{s^2}. \quad (30)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (30). Поменяв порядок интегрирования, придем к равенству:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_x^\infty \frac{\psi(s) ds}{s^2} \int_x^s \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{-\mu-\nu} \left(\frac{s-t}{st} \right)^{\mu+\nu-1} \frac{dt}{t^2}.$$

Вычислим внутренний интеграл. Осуществляя замену $\frac{1}{t} = \frac{1}{s} + \tau \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s} \right)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_x^s \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{-\mu-\nu} \left(\frac{s-t}{st} \right)^{\mu+\nu-1} \frac{dt}{t^2} = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s} - \tau \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{s} \right] \right)^{-\mu-\nu} \left(\tau \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{s} \right] \right)^{\mu+\nu-1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{s} \right) d\tau = \\ &= \int_0^1 (1-\tau)^{-\mu-\nu} \tau^{\mu+\nu-1} d\tau = B(\mu+\nu, 1-\mu-\nu) = \Gamma(\mu+\nu)\Gamma(1-\mu-\nu). \end{aligned}$$

Таким образом, $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \Gamma(1-\mu-\nu) \int_x^\infty \frac{\psi(s) ds}{s^2},$$

а равенство (30) перепишется в виде

$$\int_x^\infty \frac{\psi(s) ds}{s^2} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu-\nu)} \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{-\mu-\nu} \frac{dt}{t^2} \int_t^\infty \left(\frac{s-t}{st} \right)^{\nu-1} E_{\rho,\nu}^{-\gamma} \left[\omega \left(\frac{s-t}{st} \right)^\rho \right] \frac{f(s) ds}{s^2} \quad (31)$$

или, учитывая (9) и (6),

$$\int_x^\infty \frac{\psi(s) ds}{s^2} = (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x). \quad (32)$$

В силу (25) из (32) следуют условия (26).

Применяя оператор $\left(-x^2 \frac{d}{dx} \right)$ к обеим частям (32), получим

$$\psi(s) = \left(-x^2 \frac{d}{dx} \right) (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) = (D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x). \quad (33)$$

Таким образом, если уравнение (28), а значит, и (14) имеют решение, то это решение необходимо имеет вид (33) и, следовательно, единственно. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (26). Так как

$$(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) \in \mathcal{AC}[a, \infty),$$

то

$$(D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) = \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right) (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) \in \mathcal{L}(a, \infty).$$

Поэтому функция, представляемая формулой (33), существует почти всюду и принадлежит $\mathcal{L}(a, \infty)$. Покажем, что она действительно дает решение уравнения (28). Для этого подставим ее в левую часть уравнения (28) и результат обозначим через $(E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\mu+\nu-1} \frac{(D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(t) dt}{t^2} = (E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(x). \quad (34)$$

Покажем, что $(E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(x) = (E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x)$ почти всюду, что и докажет теорему. Равенство (34) есть уравнение (28) относительно $(D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(t)$. Оно заведомо разрешимо, поэтому в силу (33)

$$(D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) = \left(-x^2 \frac{d}{dx}\right) (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x),$$

т.е.

$$(D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) = (D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(x).$$

Функции $(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x)$ и $(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(x)$ абсолютно непрерывны: первая по предположению, а вторая — в силу равенства (32). Поэтому

$$(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(x) - (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(x) = c.$$

По предположению $(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(\infty) = 0$, а $(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(\infty) = 0$, потому что (34) — разрешимое уравнение. Поэтому $c = 0$, и, следовательно,

$$[J_-^{1-\mu-\nu} ((E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(t) - (E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(t))](x) = 0.$$

Последнее равенство есть уравнение вида (28). В силу единственности решения

$$(E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} f)(t) - (E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-\gamma} g)(t) \equiv 0.$$

Таким образом, функция (33) является решением уравнения (28). Покажем, что она также является решением уравнения (14). Для любого $0 < \nu < 1 - \mu$ применим оператор $E_{\rho,\nu,\omega;-}^{\gamma}$ к уравнению (28), и, воспользовавшись равенствами (12) и (19), получим следующее уравнение:

$$(J_-^{2\nu} E_{\rho,\mu,\omega;-}^{\gamma} \psi)(x) = (J_-^{2\nu} f)(x) \quad (x > a, a > 0). \quad (35)$$

Применяя оператор $D_-^{2\nu}$ к обеим частям (35) и учитывая (21), имеем уравнение (14). Следовательно, функция $\psi(x)$ является решением уравнения (14). Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть $\rho, \mu, \omega \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$, $\mu > 0$). Для того чтобы интегральное уравнение

$$\int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx}\right)^{\mu-1} E_{\rho,\mu} \left[\omega \left(\frac{t-x}{tx}\right)^\rho \right] \frac{\psi(t) dt}{t^2} = f(x) \quad (x > a) \quad (36)$$

было разрешимо в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-1} f)(x) \in \mathcal{AC}[a, \infty), \quad (J_-^{1-\mu-\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-1} f)(\infty) = 0$$

для любого $0 < \nu < 1 - \mu$. Тогда единственное решение $\psi(x) \in \mathcal{L}(a, \infty)$ уравнения (36) имеет вид

$$\psi(x) = (D_-^{\mu+\nu} E_{\rho,\nu,\omega;-}^{-1} f)(x).$$

Следствие 8. Пусть $\mu, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$ ($\mu > 0$). Для того чтобы интегральное уравнение

$$\int_x^\infty \left(\frac{t-x}{tx} \right)^{\mu-1} \Phi \left[\gamma, \mu, \omega \left(\frac{t-x}{tx} \right) \right] \frac{\psi(t) dt}{t^2} = f(x) \quad (x > a) \quad (37)$$

было разрешимо в пространстве $\mathcal{L}(a, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$(J_-^{1-\mu-\nu} \Phi_{-\gamma, \nu, \omega; -} f)(x) \in \mathcal{AC}[a, \infty), \quad (J_-^{1-\mu-\nu} \Phi_{-\gamma, \nu, \omega; -} f)(\infty) = 0$$

для любого $0 < \nu < 1 - \mu$. Тогда единственное решение $\psi(x) \in \mathcal{L}(a, \infty)$ уравнения (37) имеет вид

$$\psi(x) = (D_-^{\mu+\nu} \Phi_{-\gamma, \nu, \omega; -} f)(x).$$

Работа выполнена в рамках НИР БГУ № 602/25 “Функции гипергеометрического типа и их приложения в математике и механике”, входящей в Государственную программу Республики Беларусь “Математические модели”, а также при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект ФО8МС-028).

Литература

1. *Prabhakar T.R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // *Yokohama Math. J.* 1971. V. 19. P. 7–15.
2. *Mittag-Leffler G.M.* Sur la representation analytique d’une fonction monogene // *Acta Math.* 1905. V. 29. P. 101–181.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965.
4. *Kilbas A.A., Saigo M., Saxena R.K.* Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators // *Integral Transforms Spec. Funct.* 2004. V. 15. № 1. P. 31–49.
5. *Килбас А.А., Князюк Н.В.* Свойства интегральных операторов с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера в ядре // *Вестник БГУ. Сер. 1.* 2007. № 2. С. 60–64.
6. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. *Килбас А.А., Князюк Н.В.* Интегродифференциальное уравнение с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера на полуоси // *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тр. 4-й Междунар. конф., посвященной 100-летию академика Ф.Д. Гахова. 13–19 сентября 2006 г. Минск (Беларусь).* Т. 1. Математический анализ. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2006. С. 57–64.
8. *Килбас А.А., Князюк Н.В.* Модифицированные дробные интегралы и производные на полуоси и дифференциальные уравнения дробного порядка в пространстве интегрируемых функций // *Труды Института математики. Минск, 2007. Т. 15. № 1.* С. 68–77.

A. A. Kilbas, N. V. Kniaziuk

**The integral equation with the generalized Mittag-Leffler function
in the kernel in the space of integrable functions**

Summary

The integral equation of the first kind containing the generalized Mittag-Leffler function in the kernel is investigated on the half-axis. The necessary and sufficient conditions of a solvability of the considered equation in the weighed space of integrable functions are proved and its solution in closed form is obtained.