Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2009. Том 17. № 2. С. 15–22

УДК 517.58

ПОРЯДКИ И ТИПЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ РАЙТА И МИТТАГ–ЛЕФФЛЕРА

А. А. Килбас, В. В. Липневич

Белорусский государственный университет
e-mail: anatolykilbas@gmail.com, veralipnevich@gmail.com
Поступила 14.05.2009

Рассматривается целая функция, коэффициентами которой являются произведения и частные конечного числа гамма-функций. Вычисляется порядок и тип такой функции, известной как обобщенная функция Райта. Даются приложения для вычисления порядков и типов обобщенной функции Миттаг–Леффлера с четным и нечетным числом параметров и обобщенной гипергеометрической функции. Приводятся специальные случаи, включающие функции Райта, Миттаг–Леффлера и вырожденную гипергеометрическую функцию Куммера.

Введение. Рассмотрим специальную функцию, определенную для целых неотрицательных $p, q \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $(p^2+q^2 \neq 0)$, комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и действительных $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(\alpha_i, \beta_j \neq 0;\ \ i = 1, 2, \ldots, p;\ \ j = 1, 2, \ldots, q)$ степенным рядом

$$ {}_p\Psi_q(z) \equiv {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_i, \alpha_i)_{1,p}\\(b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

При этом пустые произведения в (1), если таковые имеются, считаются равными единице. Эта функция известна как обобщенная функция Райта [1, § 4.1, 2, § 1.11] по имени английского математика Райта, исследовавшего ее свойства в [3–5].

Специальный случай функции (1) в виде

$$ \phi(\beta, b; z) \equiv {}_0\Psi_1\left[\begin{matrix}\overline{\quad\quad}\\(b, \beta)\end{matrix}\middle| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(b + \beta k)} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

с $b \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ $(\beta \neq 0)$ введен в работе [6] и называется функцией Райта [7, § 18.1]. Если положить $\beta = \omega$, $b = \nu + 1$ и заменить z на $-z$, то функция $\phi(\mu, \nu + 1; -z)$ принимает вид

$$ \phi(\omega, \nu + 1; -z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu + 1 + \omega k)} \frac{z^k}{k!} \equiv J_\nu^\omega(z). \tag{3}$$

$J_\nu^\omega(z)$ известна как функция Бесселя–Майленда [8, (11.63)] или обобщенная функция Бесселя–Райта [9, (E.36)].

Асимптотическое поведение функции $\phi(\beta, b; z)$ при $z \to \infty$ исследовано в [10, 11], где получены первые члены ее асимптотики в случаях $\beta > 0$ и $-1 < \beta < 0$ соответственно. В работах [3–5] эти результаты распространены на обобщенную функцию Райта ${}_p\Psi_q(z)$, $z \in \mathbb{C}$, при выполнении условия

$$\sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i > -1. \tag{4}$$

Заметим, что соответствующие результаты для ${}_p\Psi_q(z)$ в некоторых частных случаях установлены в [12].

Свойства обобщенной функции Райта (1) изучены в [13–15]: в работе [13] доказаны условия существования ${}_p\Psi_q(z)$ и установлены ее представления в виде контурных интервалов Меллина–Барнса [1, § 1.19] и так называемой H-функции [16, гл. 1, 2], в [14] получены формулы дробного интегрирования и дифференцирования, а в [15] – формула дифференцирования ${}_p\Psi_q(z)$. При этом в работе [13, теорема 1] доказано, что ${}_p\Psi_q(z)$ есть целая функция от z при условии (4); в частности, $\phi(\beta, b; z)$ — целая функция от z при $\beta > -1$.

Настоящая работа посвящена вычислению таких параметров обобщенной функции Райта (1), как порядок и тип. Для целой функции $f(z)$ ее порядок ρ и тип σ определяются следующими формулами [17]:

$$\rho = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \sigma = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}, \tag{5}$$

где $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Доказываем формулы порядка и типа обобщенной функции Райта ${}_p\Psi_q(z)$; в частности, функций $\phi(\beta, b; z)$ и $J_\nu^\omega(z)$ в (2) и (3). Мы применяем полученные результаты для вычисления порядка и типа обобщенных функций Миттаг–Леффлера [2, § 1.9; 18]

$$E((\alpha_i, \beta_i)_{1,n}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i k + \beta_i)} \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{6}$$

и

$$E_r((\alpha_i, \beta_i)_{1,n}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k}{\prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i k + \beta_i)} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{7}$$

где $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$; $r, \beta_i \in \mathbb{C}$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0;\ i = 1, 2, \dots, n)$, $(r)_k$ $(r \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N})$ — символ Похгаммера:

$$(r)_0 = 1, \quad (r)_k = r(r+1)\dots(r+k-1) \quad (k \in \mathbb{N}),$$

а также для обобщенной гипергеометрической функции [2, § 4.1]

$${}_pF_q[a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} (a_i)_k}{\prod\limits_{j=1}^{q} (b_j)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{8}$$

где $p,\ q \in \mathbb{N}_0$; $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \dots, p;\ j = 1, 2, \dots, q)$ и пустые произведения, если такие имеются, считаются равными единице.

Как следствие, мы выводим формулы порядка и типа для функций (6)–(8) с $n = 1$, $n = 2$ и получаем известные формулы для классической функции Миттаг–Леффлера [7, § 181; 19, гл. VI, §1]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{C};\ z \in \mathbb{C}) \tag{9}$$

и функции [19]

$$E^r_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!} \quad (\alpha_i > 0,\ \beta_i \in \mathbb{C};\ z \in \mathbb{C}). \tag{10}$$

Отметим, что в последнее время возрос интерес к изучению функций Райта (2) и Миттаг–Леффлера (9), их обобщения (1) и (6), других обобщений и модификаций (2), (9) в связи с тем, что в терминах таких функций выражаются явные решения дифференциальных уравнений с обыкновенными и частными дробными производными [2, гл. 4–7].

1. Порядок и тип обобщенной функции Райта. Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$ $(p^2 + q^2 \neq 0)$, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(\alpha_i, \beta_j \neq 0;\ i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$. Введем обозначения

$$\Delta = \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i, \tag{11}$$

$$\delta = \prod_{i=1}^{p} |\alpha_i|^{-\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} |\beta_j|^{\beta_j}, \tag{12}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} a_i + \frac{p-q}{2}; \tag{13}$$

при этом пустые суммы в (11), (13) и пустые произведения в (12), если таковые имеются, считаются равными соответственно нулю и единице.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $p, q \in \mathbb{N}_0$ $(p^2 + q^2 \neq 0)$, *пусть* $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ *и* $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(\alpha_i, \beta_j \neq 0;$ $i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$ *и пусть* Δ *и* δ *даются формулами (11) и (12). Если* $\Delta > -1$, *то обобщенная функция Райта* ${}_p\Psi_q(z)$ *есть целая функция порядка*

$$\rho = \frac{1}{\Delta + 1} = \left(\sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + 1 \right)^{-1} \tag{14}$$

и типа

$$\sigma = \frac{\delta^{-\rho}}{\rho} = \left(\sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + 1 \right) \left(\prod_{i=1}^{p} |\alpha_i|^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} |\beta_j|^{-\beta_j} \right)^{1/(\sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + 1)}. \tag{15}$$

Доказательство. Условие $\Delta > -1$ равносильно условию (4) и поэтому, как указано во введении, ${}_p\Psi_q(z)$ есть целая функция от $z \in \mathbb{C}$. Докажем формулы (14) и (15). Для этого перепишем (1) в виде степенного ряда

$${}_p\Psi_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{1}{k!}. \tag{16}$$

Согласно [17, (1.05) и (1.06)], порядок ρ и тип σ целой функции $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ выражается через коэффициенты c_k :

$$\rho = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{\ln\dfrac{1}{|c_k|}}, \tag{17}$$

$$(\sigma e\rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{k\to\infty} (k^{1/\rho} \sqrt[k]{|c_k|}\,). \tag{18}$$

Для коэффициента c_k, даваемого в (16), имеет место асимптотическая формула [13, (2.10)]

$$|c_k| \sim A\left(\frac{k}{e}\right)^{-(\Delta+1)k} \delta^{-k} k^{-[\mathrm{Re}(\mu)+1/2]} \quad (k\to\infty), \tag{19}$$

где Δ, δ и μ даются (11)–(13),

$$A = (2\pi)^{(p-q-1)/2} \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} |\alpha_i|^{\mathrm{Re}(a_i)-1/2}}{\prod\limits_{j=1}^{q} |\beta_j|^{\mathrm{Re}(b_j)-1/2}}.$$

Следовательно, на основании (19)

$$\ln\frac{1}{|c_k|} \sim (\Delta+1)k\ln k \quad (k\to\infty).$$

Подставляя эту оценку в (17), имеем

$$\rho = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{k\ln k}{(\Delta+1)k\ln k} = \frac{1}{\Delta+1},$$

что доказывает (14). В силу (19)

$$\sqrt[k]{|c_k|} \sim \left(\frac{k}{e}\right)^{-(\Delta+1)} \frac{1}{\delta} \quad (k\to\infty),$$

и поэтому с учетом (16) имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} (k^{1/\rho} \sqrt[k]{|c_k|}\,) = \varlimsup_{k\to\infty} \left[k^{1/\rho} \left(\frac{k}{e}\right)^{-1/\rho} \frac{1}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta}\, e^{1/\rho}.$$

Подставляя это выражение в (19), получаем

$$(\sigma e\rho)^{1/\rho} = \frac{1}{\delta} e^{1/\rho}$$

и, следовательно, $\sigma = \dfrac{1}{\rho}\delta^{-\rho}$, что доказывает (15). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если* $\beta > -1$ $(\beta \neq 0)$ *и* $b \in \mathbb{C}$, *то порядок и тип целой функции* $\phi(\beta, b; z)$ *даются формулами*

$$\rho = \frac{1}{\beta+1}, \quad \sigma = (\beta+1)|\beta|^{\beta}. \tag{20}$$

Следствие 2. *Если* $\omega > -1$ $(\omega \neq 0)$ *и* $\nu \in \mathbb{C}$, *то порядок и тип целой функции* J_ν^ω *даются формулами*

$$\rho = \frac{1}{\omega+1}, \quad \sigma = (\omega+1)|\omega|^{\omega}. \tag{21}$$

Доказательство. Согласно (2) и (3) параметры Δ и δ в (11), (12) принимают соответственно вид $\Delta=\beta,\ \ \delta=|\beta|^{\beta}$ и $\Delta=\omega,\ \ \delta=|\omega|^{\omega}$. Поэтому (20) и (21) вытекают из (14) и (15).

2. Порядок и тип обобщенных функций Миттаг–Леффлера. Так как $k!=(1)_k$ $(k\in\mathbb{N}_0)$, то обобщенную функцию Миттаг–Лефлера (6) можно представить как обобщенную функцию Райта (1) с $p=1$ и $q=n$ вида

$$E((\alpha_i,\beta_i)_{1,n};z)={}_1\Psi_n\left[\begin{matrix}(1,1)\\(\beta_i,\alpha_i)_{1,n}\end{matrix}\middle|z\right]. \tag{22}$$

Параметры Δ и δ в (11) и (12) для обобщенной функции Райта в (22) принимают вид

$$\Delta=\alpha_1+\ldots+\alpha_n-1,\quad \delta=\prod_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{\alpha_i}. \tag{23}$$

Поэтому из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$ *и пусть* $\alpha_i\in\mathbb{R},\ \ \beta_i\in\mathbb{C}\ \ (i=1,2,\ldots)$. *Если* $\alpha_1+\ldots+\alpha_n>0$, *то обобщенная функция Миттаг–Леффлера* $E((\alpha_i,\beta_i)_{1,n};z)$ *есть целая функция порядка*

$$\rho=\frac{1}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \tag{24}$$

и типа

$$\sigma=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{|\alpha_i|}\right)^{\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right)}. \tag{25}$$

Следствие 3. *Если* $\alpha>0,\ \ \beta\in\mathbb{C}$, *то порядок и тип функции Миттаг–Леффлера* $E_{\alpha,\beta}(z)$ *даются формулами*

$$\rho=\frac{1}{\alpha},\quad \sigma=1. \tag{26}$$

Следствие 4. *Пусть* $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ *и* $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{C}$. *Если* $\alpha_1+\alpha_2>0$, *то порядок и тип обобщенной функции Миттаг–Леффлера*

$$E_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha_1k+\beta_1)\Gamma(\alpha_2k+\beta_2)} \tag{27}$$

даются формулами

$$\rho=\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2},\quad \sigma=\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{|\alpha_1|}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{|\alpha_2|}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}. \tag{28}$$

Замечание 1. Формула (26) порядка и типа классической функции Миттаг–Леффлера (9) хорошо известна (см., например, [7, § 18.1, 19, гл. III, р. 1]).

Замечание 2. В случае $\alpha_1>0,\ \ \alpha_2>0$ формула (28) порядка и типа обобщенной функции Миттаг–Леффлера (27) получены в работе [20].

Замечание 3. При $\alpha_i>0\ \ (i=1,2,\ldots,n)$ формулы (24), (25) порядка и типа обобщенной функции Миттаг–Леффлера (6) доказаны в [21].

Обобщенная функция Миттаг–Леффлера (7) совпадает с обобщенной функцией Райта (1) с $p=1$ и $q=n$ с точностью до постоянного множителя:

$$E_r((\alpha_i,\beta_i)_{1,n};z)=\frac{1}{\Gamma(r)}{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(\Gamma,1)\\(\beta_i,\alpha_i)_{1,r}\end{matrix}\middle|z\right]. \tag{29}$$

Параметры Δ и δ в (11) и (12) для обобщенной функции Райта (29) представлены формулой (23). Поэтому из теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть $r, \beta_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Если $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n > 0$, то порядок и тип обобщенной функции Миттаг–Леффлера $E_r((\alpha_i, \beta_i)_{1,n}; z)$ даются формулами (24) и (25).*

Следствие 5. *Если $\alpha > 0$ и $r, \beta \in \mathbb{C}$, то порядок и тип обобщенной функции Миттаг–Леффлера $E^r_{\alpha,\beta}(z)$ даются формулами (26).*

Следствие 6. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $r, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. Если $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, то порядок и тип обобщенной функции Миттаг–Леффлера*

$$E^r_{\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)\Gamma(\alpha_2 k + \beta_2)} \frac{z^k}{k!}$$

даются формулами (28).

Замечание 4. Формула (26) порядка и типа обобщенной функции Миттаг–Леффлера (10) доказана в работе [22].

3. Порядок и тип обобщенной гипергеометрической функции. Используя формулу

$$(z)_k = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)} \quad (z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0),$$

представим обобщенную гипергеометрическую функцию (8) в виде обобщенной функции Райта (1) с точностью до постоянного множителя:

$${}_pF_q[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z] = \frac{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j)}{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(a_i)} \, {}_p\Psi_q \left[\begin{array}{c} (a_i, 1)_{1,p} \\ (b_j, 1)_{1,q} \end{array} \middle| z \right]. \tag{30}$$

Параметры Δ и δ в (11) и (12) для обобщенной функции Райта в (30) принимают вид

$$\Delta = q - p, \quad \delta = 1.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$ $(p^2 + q^2 \neq 0)$ и пусть $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$, $b_j \neq 0, -1, -2, \ldots$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$. Если $q - p > -1$, то ${}_pF_q[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z]$ есть целая функция от $z \in \mathbb{C}$ порядка $\rho = \dfrac{1}{q - p + 1}$ и типа $\sigma = q - p + 1$.*

Следствие 7. *Если $p \in \mathbb{N}$ и $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $(b_i \neq 0, -1, -2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, p)$, то обобщенная гипергеометрическая функция*

$${}_pF_p[a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_p; z] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{p} \frac{(a_i)_k}{(b_i)_k} \right) \frac{z^k}{k!}$$

есть целая функция от $z \in \mathbb{C}$ порядка $\rho = 1$ и типа $\sigma = 1$.

Следствие 8. *Если $q \in \mathbb{N}$ и $a, b_i \in \mathbb{C}$ $(b_i \neq 0, -1, -2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, q)$, то обобщенная гипергеометрическая функция*

$${}_1F_q[a; b_1, \ldots, b_q; z] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{\prod\limits_{i=1}^{q} (b_i)_k} \frac{z^k}{k!}$$

есть целая функция от $z \in \mathbb{C}$ порядка $\rho = \dfrac{1}{q}$ и типа $\sigma = q$.

В частности, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [1, §61]

$$ {}_1F_1[a;c;z] \equiv \Phi(a;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} $$

с $a, c \in \mathbb{C}$ $(c \neq 0, -1, -2, \ldots)$ есть целая функция от $z \in \mathbb{C}$ порядка $\rho = 1$ и типа $\sigma = 1$.

Работа выполнена в рамках проекта “Обобщенные гипергеометрические функции и их приложения в математике и механике”, входящего в Государственную программу фундаментальных исследований “Математические модели”, и при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект ФО8МС-028).

Литература

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция Гаусса. Функции Лежандра. М., 1973.
2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
3. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // J. London Math. Soc. 1935. V. 10. P. 286–293.
4. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1940. V. 238. P. 423–451.
5. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function II // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1940. V. 46. P. 389–409.
6. *Wright E.M.* On the coefficient of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 71–79.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М., 1967.
8. *Маричев О.И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул). Минск, 1978.
9. *Kiryakova V.S.* Generalized Fractional Calculus and Applications. Harlow: Longman, 1994.
10. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of the generalized Bessel function // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1934. V. 38. P. 257–270.
11. *Wright E.M.* The generalized Bessel functions of order greater than one // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1940. V. 11. P. 36–48.
12. *Fox C.* The asymptotic expansion of generalized hypergeometric function // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1928. V. 27. P. 389–400.
13. *Kilbas A.A., Saigo M., Trujillo J.J.* On the generalized Wright function // Frac. Calc. Appl. Anal. 2002. V. 5. P. 437–460.
14. *Kilbas A.A.* Fractional calculus of the generalized Wright function // Frac. Calc. Appl. Anal. 2005. V. 8. № 2. P. 113–126.
15. *Килбас А.А., Королева А.А.* Расширенные обобщенные функции Миттаг–Леффлера как H-функция. Обобщенные функции Райта и их формулы дифференцирования // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2005. № 2. С. 53–60.
16. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. Theory and Applications. Boca Raton–London–New York–Washington, 2006.
17. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.
18. *Al-Bassam M.A., Luchko Y.F.* On generalized fractional calculus and its application to the solution of integro-differential equation // J. Frac. Calc. 1995. V. 7. P. 69–88.
19. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.

20. *Джрбашян М.М.* Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией Миттаг–Леффлера // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1960. Т. 13. № 3. С. 21–63.
21. *Килбас А.А., Королева А.А.* Обобщенная функция Миттаг–Леффлера и ее расширение // Тр. Института математики. Минск. 2005. Т. 13. № 1. С. 23–32.
22. *Prabhakar T.R.* A singular integral equation with a generalized Mittag–Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. V. 9. P. 7–15.

A. A. Kilbas, V. V. Lipnevich

Orders and types of the Wright and Mittag–Leffler functions

Summary

An entire function, with coefficients involving products and quotients of a finite number of gamma functions, is considered. The order and the type of such a function, known as the generalized Wright function, are evaluated. Applications are given to evaluate the orders and types of the generalized Mittag–Leffler functions will even and odd parameters and of the generalized hypergeometric function. Special cases involving in particular Wright, Mittag–Leffler and the confluent hypergeometric Kummer functions are presented.