Математические заметки

том 52 выпуск 1 июль 1992

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА О ФУНКЦИЯХ С ПРОИЗВОДНОЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА H_1

А. А. Пекарский

Для функции f, аналитической в круге $D=\{z: |z|<1\}$, $p\in(0,\infty]$ и $r\in[0,1)$ положим

$$M_p(f,r)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p\,dt\right)^{1/p}\quad \text{при } 0<p<\infty,$$
$$M_\infty(f,r)=\max_{t\in[0,2\pi]}|f(re^{it})|\qquad \text{при } p=\infty.$$

Согласно определению (см., например, [4]) f принадлежит пространству Харди H_p, если

$$\|f\|_{H_p}:=\lim_{r\to 1-0}M_p(f,r)<\infty.$$

Указанный предел существует ввиду неубывания $M_p(f,r)$. Функция $f\in H_p$ почти для всех $z\in\partial D$ имеет некасательные предельные значения, которые мы обозначаем также через $f(z)$. При этом $M_p(f,1)$ совпадает с $\|f\|_{H_p}$.

Через $\mathbf{T}$ обозначим факторгруппу $\mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$, которая каждому $x\in\mathbf{R}$ ставит в соответствие класс $\dot{x}=x+2\pi\mathbf{Z}$, содержащий x. Топология в $\mathbf{T}$ задается метрикой $d(\dot{x},\dot{y})=\min\{|x-y+2\pi k|: k\in\mathbf{Z}\}$. Пусть I — отрезок действительной оси или факторгруппа $\mathbf{T}$. Через $L_p(I)$, $0<p\leqslant\infty$, обозначаем пространство Лебега комплексных функций g на I, наделенных стандартной квазинормой $\|g\|_p=\|g\|_{L_p(I)}$.

В теории пространств H_p хорошо известна следующая теорема Харди — Литтлвуда (см. [1] и [2], а также [3]).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f\in H_1$, $g(t)=f(e^{it})$ и $\omega(g,\cdot)$ — модуль непрерывности g в $L_1(\mathbf{T})$. Тогда следующие условия равносильны:*

(a) $f'\in H_1$;

(b) *g п.в. на $\mathbf{T}$ совпадает с некоторой абсолютно непрерывной функцией;*

(c) *g п.в. на $\mathbf{T}$ совпадает с некоторой функцией ограниченной вариации;*

(d) $\omega(g,\delta)=O(\delta)$ *при* $\delta\to 0$.

Наша цель дать обобщение этой теоремы для высших производных и пространств H_p. Для этого понадобятся следующие определения. Пусть I — отрезок, $s\in\mathbf{N}$, $0<p\leqslant\infty$ и $0<q<\infty$. Через $E_{s-1}(g, L_p(I))$, $g\in L_p(I)$, обозначим наилучшее приближение g в $L_p(I)$ алгебраическими полиномами степени не выше $s-1$. Функцию $g\in L_p(I)$ называем функцией ограниченной (p, s, q)*-вариации*, если существует такое число $V\geqslant 0$, что для всех $n=0, 1, 2, \ldots$ и всех разбиений

$$-\infty<t_0<t_1\leqslant t_2<t_3\leqslant\ldots\leqslant t_{2n}<t_{2n+1}\leqslant t_0+2\pi \tag{1}$$

факторгруппы $\mathbf{T}$ выполняется неравенство

$$\left[\sum_{k=0}^{n} E_{s-1}(g, L_p[t_{2k}, t_{2k+1}])^q\right]^{1/q}\leqslant V. \tag{2}$$

Нижнюю грань чисел V, для которых верно (2) для всех разбиений (1), называем (p, s, q)*-вариацией* функции g и обозначаем через $V_{p,s,q}(g)$. Далее, g называем (p, s, q)*-абсолютно* непрерывной функцией, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого разбиения (1), удовлетворяющего условию

$$\sum_{k=0}^{n}(t_{2k+1}-t_{2k})\leqslant\delta,$$

неравенство (2) выполняется с $V=\varepsilon$.

Очевидно, функция $(\infty, 1, 1)$-ограниченной вариации ($(\infty, 1, 1)$-абсолютно непрерывная) совпадает п. в. на $\mathbf{T}$ с некоторой функцией ограниченной вариации (абсолютно непрерывной) в классическом смысле. Ранее понятия обобщенной вариации и обобщенной абсолютной непрерывности встречались в работах Н. Винера, Я. Петре, Ю. А. Брудного, Е. П. Долженко и других авторов.

Для $g\in L_p(\mathbf{T})$, $s\in\mathbf{N}$ и $h\geqslant 0$ введем также

$$\Delta_h^s(g, x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{s-k}C_s^k g(x+kh)$$

— s-ю конечную разность с шагом h и

$$\omega_{p,s}(g,\delta)=\sup_{0\leqslant h\leqslant\delta}\|\Delta_h^s(g,\cdot)\|_{L_p(\mathbf{T})}$$

— s-й модуль гладкости в $L_p(\mathbf{T})$.

Для функции f, аналитической в D, положим $f^{[1]}(z)=izf'(z)$ и $f^{[s]}(z)=(f^{[s-1]}(z))^{[1]}$ при $s=2, 3, \ldots$ Иначе говоря, если $z=re^{it}$, то $f^{[s]}(z)=d^s f(re^{it})/dt^s$. Через H_σ^s, $0<\sigma\leqslant\infty$, обозначим множество функций f таких, что $f^{[s]}\in H_\sigma$. Согласно теореме Харди — Литтлвуда [2], [4] имеют место вложения $H_\sigma^s\subset H_\infty$ при $\dfrac{1}{\sigma}\leqslant s$ и $H_\sigma^s\subset H_p$ при $0<p<\infty$ и $\dfrac{1}{\sigma}=s+\dfrac{1}{p}$.

Основным результатом данной статьи является

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $p\in(0, \infty]$, $s\in\mathbf{N}$, $\sigma=\left(s+\dfrac{1}{p}\right)^{-1}$, $f\in H_\sigma$ *и* $=f(e^{it})$. *Тогда следующие условия равносильны*:

(a) $f \in H_\sigma^s$;

(b) g — *(p, s, σ)-абсолютно непрерывна на* $\mathbf{T}$:

(c) g — *функция ограниченной (p, s, σ)-вариации*;

(d) $\omega_{\sigma,s}(g, \delta) = O(\delta^s)$ *при* $\delta \to 0$.

Замечание. Импликация (a)$\Rightarrow$(d), хорошо известная для $\sigma \geqslant 1$, на случай $\sigma < 1$ была распространена Е. А. Стороженко [8] методом, отличным от данной работы.

Доказательству теоремы 2 мы предпошлем теоремы 3, 4 и лемму 1.

Действительнозначную функцию $\varphi \in C^{s-1}(\mathbf{T})$, $s \in \mathbf{N}$, называем *s-простой*, если $\varphi^{(s-1)}$ абсолютно непрерывна и $\varphi^{(s)} \in L_\infty(\mathbf{T})$. Наименьший отрезок $J \subset J(\varphi)$, содержащий $\operatorname{supp}\varphi$, будем называть *опорным* для φ. Причем если $J = \mathbf{T}$, то дополнительно предполагается существование точки $t_0 \subset \mathbf{T}$ такой, что $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \ldots = \varphi^{(s-1)}(t_0) = 0$. Пусть $J = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1 \leqslant t_0 + 2\pi$. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{(s-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{s-1} \varphi^{(s)}(\tau)\, d\tau, \; t \in [t_0, t_0 + 2\pi], \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant \frac{1}{s!} |J|^s \|\varphi^{(s)}\|_\infty, \tag{4}$$

где $|J| = |J(\varphi)| = t_1 - t_0$ — длина отрезка J. В дальнейшем важную роль играет величина

$$\lambda_{s,\sigma}(\varphi) := |J|^{\frac{1}{\sigma}} \|\varphi^{(s)}\|_\infty, \quad \sigma > 0.$$

Пусть $s \in \mathbf{N}$ и $0 < \sigma \leqslant \infty$. Говорим, что функция g из $L_\sigma(\mathbf{T})$ принадлежит пространству $\mathscr{H}_\sigma^s$, если $g(t) = \operatorname{Re} f(e^{it})$, где $f \in H_\sigma^s$ и $\operatorname{Im} f(0) = 0$. Очевидно, такая функция f единственна. Квазинорму в $\mathscr{H}_\sigma^s$ введем следующим образом:

$$\|g\|_{\mathscr{H}_\sigma^s} := \|f^{[s]}\|_{H_\sigma}.$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $s \in \mathbf{N}$, $0 < p \leqslant \infty$ и $\sigma = \left(s + \frac{1}{p}\right)^{-1}$. Тогда функция $g \in L_\sigma(\mathbf{T})$ принадлежит $\mathscr{H}_\sigma^s$ в том и только том случае, когда существуют постоянная $a \in \mathbf{R}$ и последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ s-простых функций, удовлетворяющих условиям*

$$\left[\sum_{k=1}^\infty \lambda_{s,\sigma}(\varphi_k)^\sigma\right]^{1/\sigma} =: Q < \infty, \tag{5}$$

$$a + \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(t) = g(t) \text{ п. в. на } \mathbf{T}. \tag{6}$$

При этом

$$\|g\|_{\mathscr{H}_\sigma^s}^{(1)} := \inf\{Q\colon \text{ выполняются соотношения (5) и (6)}\}$$

является квазинормой в $\mathscr{H}_\sigma^s$, эквивалентной $\|g\|_{\mathscr{H}_\sigma^s}$.

Эта теорема является следствием результата Р. Койфмана [5] об атомическом разложении пространства $\operatorname{Re} H_\sigma$ при $\sigma\leqslant 1$, см. также [7].

ЛЕММА 1. *Пусть s, p и σ те же, что и в теореме 3, φ — s-простая функция и*

$$h(t)=\frac{1}{s!}\|\varphi^{(s)}\|_\infty\,\chi(t,J),$$

где $\chi(t,J)$ — характеристическая функция отрезка $J=J(\varphi)$. Тогда для любого отрезка $I\subset\mathbf{T}$ имеет место неравенство

$$E_{s-1}(\varphi,L_p(I))\leqslant\left(\int_I h(t)^\sigma\,dt\right)^{1/\sigma}. \qquad (7)$$

Доказательство заключается в рассмотрении следующих случаев (a) $I\subset\mathbf{T}\setminus J$; (b) $J\subset I$; (c) $I\subset J$; (d) $I\cap J\neq\varnothing$, но $I\not\subset J$ и $J\not\subset I$. Случай (a) очевиден: $\varphi(t)=0$ на I и, следовательно, $E_{s-1}(\varphi,L_p(I))=0$. В случае (b) неравенство (7) немедленно следует из (4):

$$E_{s-1}(\varphi,L_p(I))\leqslant\|\varphi\|_p\leqslant\left(\int_I h(t)^\sigma\,dt\right)^{1/\sigma}.$$

В случае (c) имеем (см., например, [6, с. 163])

$$E_{s-1}(\varphi,L_\infty(I))\leqslant\frac{|I|^s}{2^{2s-1}s!}\|\varphi^{(s)}\|_\infty$$

и, следовательно,

$$E_{s-1}(\varphi,L_p(I))\leqslant\frac{1}{s!}|I|^{s+\frac{1}{p}}\|\varphi^{(s)}\|_\infty=\left(\int_I h(t)^\sigma\,dt\right)^{1/\sigma}.$$

В случае (d) предположим, например, что $I=[\alpha,\ \beta]$, $J=[t_0,\ t_1]$ и $\alpha<t_0<\beta<t_1\leqslant\alpha+2\pi$. Тогда из (3) получим, что $|\varphi(t)|\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{s!}(\beta-t_0)^s\|\varphi^{(s)}\|_\infty$ при $t\in[t_0,\beta]$ и, значит, $E_{s-1}(\varphi,L_p(I))\leqslant$ $\leqslant\frac{1}{s!}(\beta-t_0)^{s+\frac{1}{p}}\|\varphi^{(s)}\|_\infty\leqslant\left(\int_I h(t)^\sigma\,dt\right)^{1/\sigma}$. ■

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $s\in\mathbf{N}$, $0<p\leqslant\infty$, $\sigma=\left(s+\frac{1}{p}\right)^{-1}$ и $g\in\mathscr{H}_\sigma^s$. Тогда $g\in L_p(\mathbf{T})$ и существуют постоянная $C=C(s,p)>0$ и неотрицательная функция $h\in L_\sigma(\mathbf{T})$ такие, что*

$$\|h\|_{L_\sigma(\mathbf{T})}\leqslant C\|g\|_{\mathscr{H}_\sigma^s} \qquad (8)$$

и для любого отрезка $I\subset\mathbf{T}$ выполняется неравенство

$$E_{s-1}(g,L_p(I))\leqslant\left(\int_I h(t)^\sigma\,dt\right)^{1/\sigma}. \qquad (9)$$

Доказательство. Как отмечалось выше, $H_\sigma^s \subset H_p$ и, значит, $g \in L_p(\mathbf{T})$. Пусть φ_k — s-простые функции из теоремы 3, а h_k — соответствующие им функции из леммы 1. Покажем, что

$$h(t):=\left[\sum_{k=1}^{\infty} h_k(t)^\sigma\right]^{1/\sigma},\quad t\in\mathbf{T},$$

удовлетворяет условиям (8) и (9). Действительно, (8) следует из теоремы 3:

$$\|h\|_\sigma^\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}\|h_k\|_\sigma^\sigma=\frac{1}{(s!)^\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{s,\sigma}(\varphi_k)^\sigma\leqslant C^\sigma\|g\|^\sigma_{\mathscr{H}_\sigma^s}.$$

Для доказательства (9) положим $q=\min\{1, p\}$ и воспользуемся теоремой 3 и леммой 1. Для любого отрезка $I\subset\mathbf{T}$ из (6) получаем

$$E_{s-1}(g, L_p(I))^q\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}E_{s-1}(\varphi_k, L_p(I))^q\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_I h_k(t)^\sigma dt\right)^{q/\sigma}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_I h_k(t)^\sigma dt\right)^{q/\sigma}=\left(\int_I h(t)^\sigma dt\right)^{q/\sigma}. \blacksquare$$

Доказательство теоремы 2 осуществляется по схеме (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(a). Импликация (a)$\Rightarrow$(b) следует из теоремы 4: функции $\operatorname{Re} f(e^{it})$ и $\operatorname{Im} f(e^{it})$ принадлежат $\mathscr{H}_\sigma^s$. Импликация (b)$\Rightarrow$(c) очевидна: достаточно в определении (p, s, σ)-абсолютной непрерывности положить $\delta=2\pi$.

Получим импликацию (c)$\Rightarrow$(d). Для $h\in\left(0, \frac{2\pi}{s}\right]$ положим $m=\left[\frac{2\pi}{h}\right]$, $A_j=\left[\frac{2\pi j}{m}, \frac{2\pi(j+1)}{m}\right]$ и $I_j=\left[\frac{2\pi j}{m}, \frac{2\pi(j+s+1)}{m}\right]$. Через P_j обозначим полином степени не выше $s-1$ наилучшего $L_p(I_j)$-приближения функции g. Для $k=0, 1, \ldots, s$ и $j=0, 1, \ldots, m-1$ имеем $\left[\frac{2\pi j}{m}+kh, \frac{2\pi(j+1)}{m}+kh\right]=:I_{jk}\subset I_j$ и, следовательно,

$$\|\Delta_h^s(g, \cdot)\|_\sigma^\sigma=\int_{\mathbf{T}}|\Delta_h^s(g, t)|^\sigma\,\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{m-1}\int_{A_j}|\Delta_h^s(g-P_j, t)|^\sigma\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{m-1}\int_{A_j}\left(\sum_{k=0}^{s}(C_s^k)^\sigma|g(t+kh)-P_j(t+kh)|^\sigma\right)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\leqslant(s2^s)^\sigma\sum_{j=0}^{m-1}\int_{I_j}|g(t)-P_j(t)|^\sigma\,\mathrm{d}t.$$

Согласно условию (c) g является функцией ограниченной (p, s, σ)-вариации, т. е. существует такое $V\geqslant 0$, что неравенство (2) выполняется при $q=\sigma$ для любого разбиения вида (1). Для $k=0, 1, \ldots, s$ через N_k обозначим множество чисел $j=0, 1, \ldots, m-1$, удовлетворяющих условию $j=k(\operatorname{mod}(s+1))$. Отрезки $\{I_j\}_{j\in N_k}$ пересекаются разве лишь по граничным точкам. Поэтому, применяя неравенство

Гёльдера, из (2) получим

$$\Lambda_k := \sum_{j\in N_k} \int_{I_j} |g(t)-P_j(t)|^\sigma \,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in N_k} |I_j|^{1-\frac{\sigma}{p}} E_{s-1}(g, L_p(I_j))^\sigma \leqslant \left(\frac{2\pi(s+1)}{m}\right)^{1-\frac{\sigma}{p}} V^\sigma.$$

Таким образом, получаем импликацию (c) ⇒ (d):

$$\|\Delta_h^s(g, \cdot)\|_\sigma \leqslant s2^s \left(\sum_{k=0}^{s} \Lambda_k\right)^{1/\sigma} \leqslant C(s, p)\, h^s V.$$

Для доказательства импликации (d) ⇒ (a) введем вспомогательную функцию

$$f_{h,s}(z) = \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s-k} C_s^k f(ze^{ikh}), \qquad h>0,$$

принадлежащую пространству H_σ. Согласно условию $\omega_{\sigma,s}(g, \delta) = O(\delta^s)$ при $\delta\to 0$ и, значит, существует такое $K>0$, что при всех $h>0$ справедливо неравенство

$$M_\sigma(f_{h,s}, 1) \leqslant Kh^s.$$

Ввиду неубывания $M_\sigma(f_{h,s}, r)$ относительно $r\in[0, 1]$ отсюда получим, что

$$M_\sigma(h^{-s} f_{h,s}, r) \leqslant K \text{ при } 0\leqslant r\leqslant 1.$$

Фиксируя здесь $r\in[0, 1)$ и полагая $h\to 0$, будем иметь

$$M_\sigma(f^{[s]}, r) \leqslant K. \blacksquare$$

Пространства H_σ^s и $\mathscr{H}_\sigma^s$ важную роль играют в задачах рациональной аппроксимации [9]. Теоремы 1, 2 и 3 позволяют ввести новые эквивалентные квазинормы в этих пространствах. Например, имеет место

Следствие. *Пусть* $s\in\mathbf{N}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\sigma = \left(s+\frac{1}{p}\right)^{-1}$, $g\in L_1(\mathbf{T})$ *и* $\tilde g$ — *сопряженная функция. Тогда* $g\in\mathscr{H}_\sigma^s$ *в том и только том случае, когда выполняется хотя бы одно из условий*

$$\|g\|^{(2)}_{\mathscr{H}_\sigma^s} := \varlimsup_{\delta\to 0} \delta^{-s}[\omega_{\sigma,s}(g, \delta) + \omega_{\sigma,s}(\tilde g, \delta)] < \infty,$$

$$\|g\|^{(3)}_{\mathscr{H}_\sigma^s} := V_{p,s,\sigma}(g) + V_{p,s,\sigma}(\tilde g) < \infty.$$

При этом $\|g\|^{(2)}_{\mathscr{H}_\sigma^s}$ *и* $\|g\|^{(3)}_{\mathscr{H}_\sigma^s}$ *являются квазинормами в* $\mathscr{H}_\sigma^s$, *эквивалентными* $\|g\|_{\mathscr{H}_\sigma^s}$.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступило
17.12.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E. Some new properties of Fourier constants // Math. Ann. 1927. V. 97. P. 159–209.

[2] Hardy G. H., Littlewood J. E. Some properties of fractional integral I. II // Math. Z. 1928. V. 27. P. 565–605; Math. Zeitschr. 1932. V. 34. P. 403–439.

[3] Smirnov V. I. Über die Ränderzuordnung bei Konformer Abbildung // Math. Ann. 1933. V. 107. P. 313–323.

[4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.

[5] Coifman R. R. A real variable characterization of H^p // Stud. Math. 1974. V. 51, № 3. P. 269–274.

[6] Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.

[7] Кротов В. Г. Дифференциальные свойства граничных функций из пространства Харди // Math. Nachr. 1986. V. 126. P. 241–263.

[8] Стороженко Э. А. О теоремах типа Джексона в H^p, $0<p<1$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 4. С. 946–962.

[9] Пекарский А. А. Прямые и обратные теоремы рациональной аппроксимации. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: Библ. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1990.