ОБ УСТРАНЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ p^r

А. А. Пекарский

Пусть G – односвязная ограниченная область Жордана в комплексной плоскости; ∂G – граница G и $\overline{G} = G \cup \partial G$. Через $E_\infty = E_\infty(G)$ обозначим пространство ограниченных аналитических функций f в G, наделенных стандартной sup-нормой: $\|f\|_{E_\infty} = \sup_{z \in G} |f(z)|$. Далее $C_A = C_A(\overline{G})$ – подпространство E_∞, состоящее из функций f, допускающих непрерывное продолжение в $\overline{G}$. В дальнейшем под $f(\xi)$ для $f \in C_A$ и $\xi \in \partial G$ подразумеваем $\lim_{G \ni z \to \xi} f(z)$. Полагаем $\|f\|_{C_A} = \|f\|_{E_\infty}$. В силу принципа максимума модуля аналитической функции имеем $\|f\|_{C_A} = \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi)|$. Через $M = M(G)$ обозначим множество функций h, определенных в G и представимых в виде $h = f - g$, где $f \in E_\infty$, а g – рациональная функция (р. ф.) с полюсами лишь в G. Ясно, что M есть некоторое подмножество множества мероморфных в G функций, имеющих конечное число полюсов. Для $h \in M$ положим

$$\|h\|_M = \sup_{\xi \in \partial G} \overline{\lim_{G \ni z \to \xi}} |h(z)|.$$

Согласно результату Данченко [1], если $f \in E_\infty$ и g_m – р. ф. степени $m \geqslant 1$ с полюсами лишь в G, то

$$\|f\|_{E_\infty} \leqslant 51m \|f - g_m\|_M. \tag{1}$$

Оценке (1) предшествовали результаты Гончара и Григоряна [2], [3] и некоторых других авторов. Из примеров, построенных в [3], следует, что неравенство (1) точное в смысле порядка. Отметим также, хотя это мы и не будем использовать, что в [1] неравенство (1) получено для *любой* области.

В настоящей заметке мы получим одно дополнение к оценке (1). Именно, мы выясним: как хорошо можно исправить функцию f посредством рациональных функций степени не выше k, $1 \leqslant k \leqslant m$? При этом мы вынуждены на область G накладывать дополнительные ограничения: G должна быть областью Альпера или Радона. Определения этих областей имеются, например, в [4], [5], где даны также ссылки на другие работы. Условимся в дальнейшем через $c, c_1, c_2, \dots$ обозначать некоторые положительные величины, зависящие лишь от G.

Теорема 1. *Пусть G – область Альпера или Радона, $f \in E_\infty(G)$, g_m – р. ф. степени m, $m \geqslant 1$, все полюсы которой лежат в G и $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогда*

(i) *существует р. ф. g_k степени не выше k с полюсами лишь в G такая, что*

$$\|f - g_k\|_M \leqslant \frac{c_1 m}{k} \|f - g_m\|_M;$$

(ii) *существует р. ф. ω_k степени не выше k с полюсами лишь в области $\Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ такая, что*

$$\|f - \omega_k\|_{E_\infty} \leqslant \frac{c_2 m}{k} \|f - g_m\|_M.$$

Для $f \in C_A(\overline{G})$ введем наилучшие равномерные рациональные приближения:

$$R_n(f, \overline{G}) = \inf_{r_n} \max_{z \in \overline{G}} |f(z) - r_n(z)|, \qquad R_n(f, \partial G) = \inf_{r_n} \max_{\xi \in \partial G} |f(\xi) - r_n(\xi)|,$$

где инфимумы берутся по всем рациональным функциям r_n степени не выше n, $n = 0, 1, 2, \dots$. При вычислении $R_n(f, \overline{G})$ мы должны учитывать р. ф. с полюсами лишь в области Ω, а при вычислении $R_n(f, \partial G)$ – в $G \cup \Omega$. Поэтому $R_n(f, \partial G) \leqslant R_n(f, \overline{G})$.

Поскольку полюсы дроби наилучшего приближения для $R_n(f,\partial G)$ могут оказаться в G, то, вообще говоря, последнее неравенство нельзя заменить равенством. Правда, это неравенство можно частично обратить. Именно, из (1) немедленно следует, что

$$R_n(f,\overline{G}) \leqslant 51nR_n(f,\partial G), \qquad n \geqslant 1. \tag{2}$$

Из теоремы 1 (ii) легко получить, что при дополнительных ограничениях на G множитель $51n$ в (2) можно заменить некоторой постоянной, зависящей от области G.

Теорема 2. *Если G – область Альпера или Радона и $f \in C_A(\overline{G})$, то для $n = 1, 2, 3, \dots$ выполняется неравенство*

$$R_n(f,\overline{G}) \leqslant c \cdot R_n(f,\partial G).$$

Отметим, что неравенство типа (2) было впервые найдено Гончаром и Григоряном [2], [3]. Теорема 2 для круга получена нами ранее (см. [4] или [6; с. 313]) с константой $c = 2$.

При доказательстве теоремы 1 мы будем применять классические пространство Лебега L_p на ∂G; пространство Харди H_p в круге $D = \{w\colon |w| < 1\}$; пространства В. И. Смирнова E_p в областях G и Ω. Будем считать $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и, что эти пространства наделены стандартными нормами. Необходимые сведения о пространствах Харди и Смирнова можно найти, например, в монографиях [6], [7], а также в работах [5], [8].

Доказательство теоремы 1. Положим $a = \|f - g_m\|_M$. Согласно теореме 3.1 из [4], или теореме 3 из [1], или теореме 4.1 из [8] имеют место соотношения

$$\|g'_m\|_{E_1(\Omega)} = \|g'_m\|_{L_1(\partial G)} \leqslant c_1 ma. \tag{3}$$

Поэтому ввиду теоремы 1.3 из [5] найдется р. ф. g_k степени не выше k, $1 \leqslant k \leqslant m$, с полюсами лишь в G такая, что

$$\|g_m - g_k\|_M = \|g_m - g_k\|_{C_A(\overline{\Omega})} \leqslant \frac{c_2}{k}\|g'_m\|_{E_1(\Omega)} \leqslant \frac{c_3 ma}{k}.$$

Покажем, что функция g_k удовлетворяет условию (i). Действительно,

$$\|f - g_k\|_M \leqslant \|f - g_m\|_M + \|g_m - g_k\|_M \leqslant a + \frac{c_3 ma}{k} \leqslant \frac{c_4 ma}{k}.$$

Для доказательства утверждения (ii) введем дополнительные обозначения. Через $z = \varphi(w)$ обозначим какую-либо функцию, осуществляющую конформное отображение круга D на область G; $w = \psi(z)$ – обратное отображение. Как известно [7], при условии спрямляемости ∂G (в рассматриваемом случае ∂G спрямляема), имеем $\varphi \in C_A(\overline{D})$, $\psi \in C_A(\overline{G})$, $\varphi' \in H_1$ и $\psi' \in E_1$.

Пусть $z_1, z_2, \dots, z_m$ – полюсы g_m (не ограничивая общности, будем считать их попарно различными). Положим $w_k = \psi(z_k)$ и введем произведение Бляшке порядка m:

$$B_m(w) = \prod_{k=1}^{m} \frac{w - w_k}{1 - \overline{w}_k w}.$$

Функция

$$F(w) := \{f[\varphi(w)] - g_m[\varphi(w)]\}B_m(w) \in H_\infty$$

и $\|F\|_{H_\infty} = \|f - g_m\|_M = a$. Из теоремы Пика–Неванлинны (см., например, [6; с. 592]) следует существование произведения Бляшке $B_{m-1}(w)$ порядка не выше $m-1$ и числа α, $|\alpha| \leqslant a$, таких, что

$$F(w_k) - \alpha B_{m-1}(w_k) = 0 \qquad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Значит, функция

$$\lambda(z) = \frac{F[\psi(z)] - \alpha B_{m-1}[\psi(z)]}{B_m[\psi(z)]} = f(z) - g_m(z) - \alpha\frac{B_{m-1}[\psi(z)]}{B_m[\psi(z)]}$$

принадлежит $E_\infty(G)$ и $\|\lambda\|_{E_\infty} \leqslant 2a$. Введем в рассмотрение функцию

$$t(z) = \alpha\frac{B_{m-1}[\psi(z)]}{B_m[\psi(z)]} \in M(G).$$

Поскольку $f(z)$ и $\lambda(z)$ аналитичны в G, то функция $u(z) = t(z)+g_m(z)$ также аналитична в G и, более того, принадлежит $C_A(\overline{G})$. Легко показать, что

$$\|t'\|_{L_1(\partial G)} \leqslant 2\pi|\alpha|(2m-1) \leqslant 4\pi ma.$$

С учетом неравенства (3), получаем

$$\|u'\|_{E_1(G)} = \|u'\|_{L_1(\partial G)} \leqslant \|t'\|_{L_1(\partial G)} + \|g'_m\|_{L_1(\partial G)} \leqslant c_5 ma.$$

Таким образом, $u' \in E_1(G)$ и $\|u'\|_{E_1(G)} \leqslant c_5 ma$. Как и при доказательстве утверждения (i), снова применим теорему 1.3 из [5], однако, в данном случае для области Ω. Согласно этой теореме существует р. ф. ω_k степени не выше k с полюсами лишь в Ω и такая, что

$$\|u - \omega_k\|_{C_A(\overline{G})} \leqslant \frac{c_6 am}{k}. \tag{4}$$

Покажем, что ω_k удовлетворяет условию (ii). Действительно,

$$\|f - \omega_k\|_{E_\infty(G)} \leqslant \|f - u\|_{E_\infty(G)} + \|u - \omega_k\|_{E_\infty(G)} \leqslant 2a + \frac{c_6 am}{k} \leqslant \frac{c_7 am}{k}.$$

Здесь мы применили неравенство (4), а также соотношения $f(z) - u(z) = \lambda(z)$ и $\|\lambda\|_{E_\infty} \leqslant 2a$. Теорема 1 доказана.

Можно показать, что множитель m/k в теореме 1 (i), (ii) является точным в смысле порядка. Соответствующий пример строится по аналогии с примером из [3], подтверждающим точность оценки (1).

Как отмечено выше, неравенство (1) выполняется для любой области G. Напротив же, наше дополнение к этому неравенству – теорема 1 получено при весьма жестких ограничениях: G должна быть областью Альпера или Радона. Как видно из доказательства, это ограничение возникает, в первую очередь, из-за применения теоремы 1.3 из [5], в которой дается оценка наилучших равномерных рациональных приближений функций $f \in C_A$, удовлетворяющих условию $f' \in E_1$. Что касается неравенства (3), то оно выполняется для существенно более широкого класса областей (подробности см. в [1], [8]).

В заключение отметим, что аналоги теоремы 2 для пространств Смирнова E_p, $0 < p \leqslant 1$, получены нами в [8] (см. теоремы 3.3 и 3.4). Для пространств E_p при $1 < p < \infty$ нужный результат вытекает из обобщенной теоремы М. Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. И. Данченко, *Analysis Math.*, **16** (1990), 241–255. **[2]** А. А. Гончар, Л. Д. Григорян, *Матем. сб.*, **99**:4 (1976.), 634–638. **[3]** Л. Д. Григорян, *Матем. сб.*, **100**:1 (1976), 156–164. **[4]** А. А. Пекарский, *Матем. заметки*, **31**:3 (1982), 389–402. **[5]** А. А. Пекарский, *Алгебра и анализ*, **13**:2 (2001), 165–190. **[6]** G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz, *Constructive Approximation. Advanced Problems*, Springer, Berlin, 1996. **[7]** И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М-Л., 1950. **[8]** А. А. Пекарский, *Алгебра и анализ*, **16**:3 (2004), 143–170.

А. А. Пекарский
Белорусский государственный технологический университет
E-mail: pekarski@bstu.unibel.by