Математические заметки

том 72 выпуск 2 август 2002

УДК 517.53

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА СЕММЕСА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

А. А. Пекарский

В открытом круге $|z|<1$ комплексной плоскости рассматриваются следующие пространства функций: $\mathscr{B}$ – пространство Блоха; H_p^α, $\alpha\geqslant 0$, $0<p\leqslant\infty$, – пространство Харди–Соболева; B_p^α, $\alpha\geqslant 0$, $0<p\leqslant\infty$, – пространство Харди–Бесова. Показано, что если все полюсы рациональной функции R степени n, $n=1,2,3,\dots$, лежат в области $|z|>1$, то $\|R\|_{H^\alpha_{1/\alpha}}\leqslant cn^\alpha\|R\|_{\mathscr{B}}$, $\|R\|_{B^\alpha_{1/\alpha}}\leqslant cn^\alpha\|R\|_{\mathscr{B}}$, где $\alpha>0$, а $c>0$ зависит лишь от α. Второе из этих неравенств в случае полуплоскости было получено Семмесом в 1984 году. Доказательство Семмеса основано на ганкелевых операторах, а наше – на специальном интегральном представлении рациональной функции.

Библиография: 7 названий.

Семмес [1], используя ганкелевы операторы, получил (см. ниже (2)) неравенство типа Бернштейна, связывающее квазинормы рациональной функции (р.ф.) в пространствах Блоха $\mathscr{B}$ и Харди–Бесова $B^\alpha_{1/\alpha}$. В связи с этим см. также работы Пеллера [2], [3], Рохберга [4] и автора [5]. Здесь предлагается прямое, существенно более простое доказательство неравенства (2). Наше доказательство основано на специальном интегральном представлении р.ф. (см. ниже лемма 1). Это позволяет, с одной стороны, существенно упростить доказательство результатов из [1] и [4] о наилучших рациональных приближениях в пространстве Блоха. С другой стороны, наше доказательство показывает, что указанные результаты можно получить без обращения к теории ганкелевых операторов. Отметим еще, что в [1] неравенство (2) доказано для полуплоскости, а мы проводим его доказательство для круга.

Введем необходимые обозначения. Пусть D и T суть соответственно открытый круг $|z|<1$ и его граница – окружность $|z|=1$. Через m_1 и m_2 обозначим соответственно меру Лебега, рассматриваемую на жордановых спрямляемых кривых $S\subset\mathbb{C}$, и плоскую меру Лебега в $\mathbb{C}$. Через $L_p(S)$, $0<p\leqslant\infty$, обозначим пространство Лебега комплексных функций на S, наделенных стандартной квазинормой $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L_p(S)}$.

Для функции f, аналитической в D, и $\alpha>0$ через $\mathscr{J}^\alpha f$ обозначаем производную Римана–Лиувилля порядка α. Именно, если $\hat f(k)$, $k=0,1,2,\dots$, есть k-й коэффициент Маклорена f, то $(\mathscr{J}^\alpha f)^\wedge(k)=(\Gamma(k+\alpha+1)/\Gamma(k+1))\hat f(k)$, где Γ – гамма-функция Эйлера. Очевидно, $(\mathscr{J}^n f)(z)=(z^n f(z))^{(n)}$ для $n\in\mathbb{N}$. Будем также считать $\mathscr{J}^0 f:=f$ и $\mathscr{J} f:=\mathscr{J}^1 f$.

В работе рассматриваются следующие пространства функций, аналитических в D: H_p, $0<p\leqslant\infty$, – пространство Харди (см., например, [6]); H_p^α, $\alpha\geqslant 0$, $0<p\leqslant\infty$, – пространство Харди–Соболева; B_p^α, $\alpha\geqslant 0$, $0<p\leqslant\infty$, – пространство Харди–Бесова;

$\mathscr{B}$ – пространство Блоха. Именно, $f \in H_p^\alpha$, если $\mathscr{J}^\alpha f \in H_p$. При этом полагаем $\|f\|_{H_p^\alpha} = \|\mathscr{J}^\alpha f\|_{H_p}$. Далее, $f \in B_p^\alpha$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{B_p^\alpha} := \left[\frac{1}{\pi}\int_D |(\mathscr{J}^{\alpha+1} f)(z)|^p (1-|z|^2)^{p-1}\, dm_2(z)\right]^{1/p} \quad \text{при} \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|f\|_{B_\infty^\alpha} := \sup_{z \in D} |(\mathscr{J}^{\alpha+1} f)(z)|(1-|z|^2) \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Пространство B_∞^0 называется *пространством Блоха* и обозначается через $\mathscr{B}$.

Положительные величины, в разных местах, вообще говоря, разные, обозначаем через $c, c_1, c_2, \dots; c(\dots), c_1(\dots), c_2(\dots), \dots$.

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть R – рациональная функция степени n, $n = 1, 2, 3, \dots$, все полюсы которой лежат вне круга $\overline{D}$. Тогда*

$$\|R\|_{H_{1/\alpha}^\alpha} \leqslant c_1(\alpha) n^\alpha \|R\|_{\mathscr{B}}, \tag{1}$$

$$\|R\|_{B_{1/\alpha}^\alpha} \leqslant c_2(\alpha) n^\alpha \|R\|_{\mathscr{B}}. \tag{2}$$

Как известно (см., например, [5]), $H_2^\alpha = B_2^\alpha$, $H_p^\alpha \subsetneqq B_p^\alpha$ при $p > 2$ и $H_p^\alpha \supsetneqq B_p^\alpha$ при $p < 2$. Поэтому неравенства (1) и (2) равносильны при $\alpha = 1/2$; (1) сильнее (2) при $\alpha < 1/2$ и (2) сильнее (1) при $\alpha > 1/2$.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1.

Нам понадобиться следующая формула типа формул Джрбашяна и Бергмана: *если функция f аналитична в D и $(\xi f(\xi))' \ln(1/|\xi|)$ суммируема в D, то*

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_D \frac{(\xi f(\xi))' \ln(1/|\xi|)}{(1-\bar{\xi} z)^2}\, dm_2(\xi), \qquad z \in D. \tag{3}$$

В справедливости (3) можно убедиться по следующей схеме:

1) используя полярные координаты, доказать (3) для функции $f(z) = z^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
2) доказать (3) для полиномов;
3) с помощью предельного перехода получить (3) в общем виде.

Для $a \in D$ введем аналитическую в D функцию $\psi_a(z) = (1 - \bar{a}z)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, находим, что при $\alpha \geqslant 0$

$$(\mathscr{J}^\alpha \psi_a)(z) = \Gamma(\alpha+1)(1-\bar{a}z)^{-\alpha-1}, \tag{4}$$

где ветвь многозначной функции $(1-\xi)^{-\alpha-1}$ выбрана так, что $(1-\xi)^{-\alpha-1} > 0$ при $\xi \in (-\infty, 1)$.

Пусть R – р.ф. из теоремы 1. Ее полюсы запишем в виде $1/\bar{a}_k$, $k = 1, \dots, n$, где $a_k \in D$. Введем

$$B(z) := \prod_{k=0}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}, \qquad a_0 := 0,$$

– *произведение Бляшке порядка* $n+1$.

Лемма 1. *Для любых $\alpha > 0$ и $z \in \overline{D}$ имеет место равенство*

$$(\mathscr{J}^\alpha R)(z) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi}\int_D (\xi R(\xi))'\left[\frac{\partial}{\partial\bar\xi}\bar\xi\left(\frac{1-\overline{B(\xi)}B(z)}{1-\bar\xi z}\right)^{\alpha+1}\right]\ln\frac{1}{|\xi|}\,dm_2(\xi). \tag{5}$$

Доказательство. При фиксированном $z \in \overline{D}$ обе части (5) непрерывно зависят от полюсов R. Следовательно, можем считать числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ попарно различными. Тогда, раскладывая R на простые дроби, будем иметь

$$R(z) = \sum_{k=0}^n b_k\psi_{a_k}(z),$$

где b_k – некоторые коэффициенты. Поэтому нам достаточно убедиться в справедливости (5) для каждой функции $R = \psi_{a_k}$. Пусть g_{a_k} – правая часть (5) с ψ_{a_k} вместо R. Поскольку $(\xi\psi_{a_k}(\xi))' = (1-\bar a_k\xi)^{-2}$, то

$$\overline{g_{a_k}(z)} = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi}\int_D\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\left(\frac{1-B(\xi)\overline{B(z)}}{1-\xi\bar z}\right)^{\alpha+1}\right]\frac{\ln(1/|\xi|)}{(1-\bar\xi a_k)^2}\,dm_2(\xi).$$

С учетом (3) и равенства $B(a_k)=0$ отсюда получим, что $\overline{g_{a_k}(z)} = \Gamma(\alpha+1)(1-\bar z a_k)^{-\alpha-1}$, т.е. (см. (4)) $g_{a_k}(z) = (\mathscr{J}^\alpha\psi_{a_k})(z)$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 и неравенства $\rho\ln(1/\rho) \leqslant (1-\rho^2)/2$, $0 < \rho \leqslant 1$, получаем, что для любых $a > 0$ и $z \in \overline{D}$

$$|(\mathscr{J}^\alpha R)(z)| \leqslant \frac{\Gamma(\alpha+1)\|R\|_{\mathscr{B}}}{\pi}\int_D\left|\frac{\partial(\xi Q(\xi,z)^{\alpha+1})}{\partial\xi}\right|\frac{dm_2(\xi)}{|\xi|}, \tag{6}$$

где

$$Q(\xi,z) := \frac{1-\overline{B(z)}B(\xi)}{1-\bar z\xi}.$$

Несложно убедиться, что при всех ξ и z из $\overline{D}$ выполняется соотношение

$$\left|\frac{\partial(\xi Q(\xi,z)^{\alpha+1})}{\partial\xi}\right| \leqslant \frac{(\alpha+1)|Q(\xi,z)|^\alpha}{|1-\xi\bar z|}(|B'(\xi)|+|Q(\xi,z)|). \tag{7}$$

Пусть $a \in D$ и $\alpha > 0$. В дальнейшем неоднократно будут применяться неравенства

$$\int_\Gamma\frac{dm_1(\eta)}{|1-\bar a\eta|^{\alpha+1}} \leqslant \frac{c_1(\alpha)}{(1-|a|)^\alpha}, \tag{8}$$

$$\int_D\frac{dm_2(\xi)}{|1-\bar a\xi|^{\alpha+2}|\xi|} \leqslant \frac{c_2(\alpha)}{(1-|a|)^\alpha}. \tag{9}$$

Соотношение (8) доказано в [5] и [7, гл. 10]. Для получения (9) нужно перейти к полярным координатам и воспользоваться (8).

Нам понадобится также *радиальная максимальная функция* M^*. Именно, для функции f, определенной в D, положим

$$(M^*f)(\eta) := \sup_{\rho\in(0,1)}|f(\rho\eta)|, \qquad \eta \in T.$$

Согласно теореме Харди–Литтлвуда (см., например, [6]) если $f \in H_p$ и $0 < p < \infty$, то

$$\int_T (M^*f)^p\,dm_1 \leqslant c\int_T |f|^p\,dm_1. \tag{10}$$

Здесь под $f(\eta)$ для $f \in H_p$ и $\eta \in T$ подразумеваются некасательные предельные значения $f(z)$, $z \in D$.

Лемма 2. *Для любых $\alpha > 0$ и $z \in T$ выполняется неравенство*

$$|(\mathscr{J}^\alpha R)(z)| \leqslant c(\alpha)\|R\|_{\mathscr{B}} \int_T \left|\frac{\partial(\xi Q(\xi,z)^{\alpha+1})}{\partial\xi}\right|^{(\alpha+1)/(\alpha+2)} dm_1(\xi).$$

Доказательство. Для фиксированного $z \in T$ введем функцию

$$f_z(\xi) = \frac{\partial(\xi Q(\xi,z)^{\alpha+1})}{\partial\xi},$$

принадлежащую всем классам H_p. Из (7) следует, что $|f_z(\xi)| \leqslant 6^\alpha/(1-|\xi|)^{\alpha+2}$. Поэтому, переходя к полярным координатам $\xi = \rho\eta$, $0 \leqslant \rho < 1$, $\eta \in T$, из (6) получим

$$|(\mathscr{J}^\alpha R)(z)| \leqslant c_1(\alpha)\|R\|_{\mathscr{B}} \int_T dm_1(\eta) \int_0^1 \min\left\{\frac{1}{(1-\rho)^{\alpha+2}}, (M^* f_z)(\eta)\right\} d\rho.$$

Следовательно,

$$|(\mathscr{J}^\alpha R)(z)| \leqslant c_2(\alpha)\|R\|_{\mathscr{B}} \int_T (M^* f_z)(\eta)^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}\, dm_1(\eta).$$

Остается воспользоваться неравенством (10). Лемма 2 доказана.

В связи с леммой 2 и неравенством (7) на окружности T рассмотрим следующие функции (определенные при указанных значениях параметров β, γ и δ):

$$\begin{aligned}
K(z,\beta) &:= \int_T |Q(\eta,z)|^\beta\, dm_1(\eta), \qquad \beta > 1;\\
N(z,\beta,\gamma) &:= \int_T \frac{|Q(\eta,z)|^\beta}{|1-\bar z\eta|^\gamma}\, dm_1(\eta), \qquad \beta > 0,\quad 0<\gamma<1,\quad \beta+\gamma>1;\\
S(z,\beta,\gamma) &:= \int_T \frac{|Q(\eta,z)|^\beta}{|1-\bar z\eta|^\gamma}|B'(\eta)|^\gamma\, dm_1(\eta), \qquad \beta > 0,\quad 0<\gamma<1,\quad \beta+\gamma>1;\\
\Lambda(z,\delta) &:= \sum_{k=0}^n \frac{1}{|1-\bar a_k z|}\left(\frac{1-|a_k|}{|1-\bar a_k z|}\right)^\delta, \qquad \delta > 0.
\end{aligned}$$

Для функции K справедлива оценка (см. [5] или [7, гл. 10]):

$$K(z,\beta) \leqslant c(\beta)\Lambda\left(z, \frac{1}{\beta+1}\right)^{\beta-1}, \qquad z \in T. \tag{11}$$

В следующих леммах 3 и 4 получены необходимые нам соотношения для функций N и S.

Лемма 3. *Для любых $z \in T$ выполняется неравенство*

$$N(z,\beta,\gamma) \leqslant c(\beta,\gamma)\Lambda(z,\delta)^{\beta+\gamma-1},$$

где $\delta = \delta(\beta,\gamma) \in (0,1)$.

Доказательство. Поскольку $\beta > 0$ и $0 < \gamma < 1$, то можем подобрать положительные числа p и q, удовлетворяющие условиям $1/p + 1/q = 1$, $p\gamma < 1$ и $q\beta > 1$. Положим $\delta = 1/(q\beta+1)$ и $E(z) = \{\eta \in T : |1-\bar{z}\eta| \leqslant 1/\Lambda(z,\delta)\}$. Используя неравенство Гёльдера, находим, что вклад в интеграл от N по множеству $E(z)$ не превосходит

$$\left(\int_{E(z)} \frac{dm_1(\eta)}{|1-\bar{z}\eta|^{p\gamma}}\right)^{1/p}\left(\int_{E(z)} |Q(\eta,z)|^{q\beta}\,dm_1(\eta)\right)^{1/p} \leqslant c_1\Lambda(z,\delta)^{\gamma-1/p}K(z,q\beta)^{1/q}$$
$$\leqslant c_2\Lambda(z,\delta)^{\beta+\gamma-(1/p+1/q)} = c_2\Lambda(z,\delta)^{\beta+\gamma-1}.$$

Здесь при получении последнего неравенства мы воспользовались соотношением (11).

Для оценки вклада в интеграл от N по множеству $T \setminus E(z)$ воспользуемся неравенством $|Q(\xi,z)| \leqslant 2/|1-\bar{z}\xi|$, $z,\xi \in T$. С учетом условия $\beta+\gamma > 1$ находим, что указанный вклад не превосходит

$$\int_{T\setminus E(z)} \frac{2^\beta}{|1-\bar{z}\eta|^{\beta+\gamma}}\,dm_1(\eta) \leqslant c_3\Lambda(z,\delta)^{\beta+\gamma-1}.$$

Этим лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Имеет место неравенство*

$$\int_T S(z,\beta,\gamma)^{1/(\beta+2\gamma-1)}\,dm_1(z) \leqslant c(\beta,\gamma)n.$$

Доказательство. Для $\eta \in T$ и $\delta \in (0,1]$ имеем

$$|B'(\eta)| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-|a_k|^2}{|1-\bar{a}_k\eta|^2} \leqslant 2\Lambda(\eta,1) \leqslant 2\Lambda(\eta,\delta).$$

Поэтому, используя теорему Фубини, лемму 3, неравенства (8) и (11), получим искомое утверждение в случае $\beta+2\gamma = 2$:

$$\int_T S(z,\beta,\gamma)\,dm_1(z) = \int_T N(\eta,\beta,\gamma)|B'(\eta)|^\gamma\,dm_1(\eta)$$
$$\leqslant c_1\int_T \Lambda(\eta,\delta)^{\beta+\gamma-1}\Lambda(\eta,\delta)^\gamma\,dm_1(\eta) \leqslant c_2 n.$$

Общий случай сведем к рассмотренному частному случаю. С этой целью выберем положительные числа β_0,β_1,p_0 и p_1, удовлетворяющие условиям $\beta_0+\beta_1=\beta$, $1/p_0+1/p_1=1$, $p_0\beta_0 > 1$ и $p_1(\beta_1+2\gamma) = 2$. Существование таких чисел следует из наложенных на β и γ ограничений. Из неравенства Гёльдера получаем

$$S(z,\beta,\gamma) \leqslant K(z,\beta_0,p_0)^{1/p_0}S(z,p_1\beta_1,p_1\gamma)^{1/p_1}.$$

Далее заметим, что

$$\beta+2\gamma-1 = \left(\beta_0-\frac{1}{p_0}\right)+\frac{1}{p_1}. \tag{12}$$

Поэтому можем применить неравенство Гёльдера в следующей форме:

$$\|S(\,\cdot\,,\beta,\gamma)\|_{1/(\beta+2\gamma-1)} \leqslant \|K(\,\cdot\,,p_0\beta_0)\|_{1/(p_0\beta_0-1)}^{1/p_0}\|S(\,\cdot\,,p_1\beta_1,p_1\gamma)\|_1^{1/p_1}.$$

Согласно (8), (11) и отмеченному выше частному случаю (в данной ситуации $p_1\beta_1 + 2p_1\gamma = 2$) получим

$$\|S(\,\cdot\,,\beta,\gamma)\|_{1/(\beta+2\gamma-1)} \leqslant c_3 n^{\beta_0-1/p_0}n^{1/p_1}.$$

Остается еще раз воспользоваться равенством (12). Лемма 4 доказана.

Доказательство неравенства (1). Используя лемму 2 и неравенство (7), получаем, что при $z \in T$

$$|(\mathscr{J}^{\alpha}R)(z)| \leqslant c(\alpha)\|R\|_{\mathscr{B}}\biggl\{N\biggl(z,\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+2},\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\biggr)+S\biggl(z,\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2},\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\biggr)\biggr\}.$$

Здесь функция N удовлетворяет указанным выше ограничениям на параметры при всех $\alpha > 0$, а функция S – лишь при $\alpha > (\sqrt{5}-1)/2$. Поэтому из лемм 3 и 4 мы получим неравенство (1) для $\alpha > (\sqrt{5}-1)/2$.

Пусть сейчас $0 \leqslant \alpha \leqslant (\sqrt{5}-1)/2 = 0.61\dots$. Заметим, что при $\alpha \in (0,1)$ имеет место равенство

$$(\mathscr{J}^{\alpha}R)(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (\mathscr{J}R)(\rho\eta)\rho^{\alpha}(1-\rho)^{-\alpha}\,d\rho, \qquad \eta \in T. \tag{13}$$

Для его доказательства нужно разложить R в ряд Маклорена и почленно проинтегрировать.

Из определений нормы в пространстве $\mathscr{B}$ и радиальной максимальной функции M^* для $\rho \in [0,1)$ и $\eta \in T$ получаем, что

$$|(\mathscr{J}R)(\rho\eta)| \leqslant \min\biggl\{\frac{\|R\|_{\mathscr{B}}}{1-\rho},(M^*\mathscr{J}R)(\eta)\biggr\}.$$

С учетом (13) отсюда находим

$$|(\mathscr{J}^{\alpha}R)(\eta)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \min\biggl\{\frac{\|R\|_{\mathscr{B}}}{1-\rho},(M^*\mathscr{J}R)(\eta)\biggr\}\frac{d\rho}{(1-\rho)^{\alpha}}.$$

Следовательно,

$$|(\mathscr{J}^{\alpha}R)(\eta)| \leqslant c(\alpha)\|R\|_{\mathscr{B}}^{1-\alpha}(M^*\mathscr{J}R)(\eta)^{\alpha}.$$

Остается воспользоваться соотношением (10) и тем, что для $\alpha = 1$ неравенство (1) уже получено. Неравенство (1) доказано полностью.

Доказательство неравенства (2). Для $\eta \in T$ и $\rho \in [0,1)$ имеют место соотношения

$$|(\mathscr{J}^{\alpha+1}R)(\rho\eta)| \leqslant (M^*\mathscr{J}^{\alpha+1}R)(\eta), \tag{14}$$

$$|(\mathscr{J}^{\alpha+1}R)(\rho\eta)| \leqslant \frac{c_1(\alpha)\|R\|_{\mathscr{B}}}{(1-\rho)^{\alpha+1}}. \tag{15}$$

Первое из них следует из определения функции M^*. Для доказательства второго заметим, что $(\mathscr{J}^{\alpha}\psi_a^2)(z) = \Gamma(\alpha+1)(1+\alpha\bar{a}z)(1-\bar{a}z)^{-\alpha-2}$ (здесь ψ_a функция из (4)). Значит, из (3) получим

$$(\mathscr{J}^{\alpha}f)(z) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\pi}\int_D \frac{1+\alpha\bar{\xi}z}{(1-\bar{\xi}z)^{\alpha+2}}(\xi f(\xi))'\ln\frac{1}{|\xi|}\,dm_2(\xi), \qquad z \in D, \tag{16}$$

где функция f удовлетворяет тем же условиям, что и в (3). Из (9) и (16) следует неравенство (15).

Из определения (квази)нормы в $B^{\alpha}_{1/\alpha}$, (14) и (15) следует соотношение

$$\|R\|^{1/\alpha}_{B^{\alpha}_{1/\alpha}} \leqslant c_2 \int_T dm_1(\eta) \int_0^1 \min\left\{ \frac{\|R\|^{1/\alpha}_{\mathscr{B}}}{(1-\rho)^2}, \frac{(M^* \mathscr{J}^{\alpha+1} R)(\eta)^{1/\alpha}}{(1-\rho)^{1-1/\alpha}} \right\} d\rho.$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим, что

$$\|R\|_{B^{\alpha}_{1/\alpha}} \leqslant c_3 \|R\|^{1/(\alpha+1)}_{\mathscr{B}} \left[\int_T (M^* \mathscr{J}^{\alpha+1} R)(\eta)^{1/(\alpha+1)}\, dm_1(\eta) \right]^{\alpha}.$$

Остается воспользоваться соотношениями (10) и (1) (с $\alpha+1$ вместо α). Неравенство (2) доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Semmes S. Trace ideal criteria for Hankel operators and application to Besov space // Integral Equations and Operator Theory. 1984. V. 7. P. 241–281.
[2] Пеллер В. В. Операторы Ганкеля класса σ_p и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов) // Матем. сб. 1980. Т. 113. №4. С. 538–582.
[3] Пеллер В. В. Описание операторов Ганкеля класса σ_p при $p > 0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения // Матем. сб. 1983. Т. 122. №4. С. 481–510.
[4] Rochberg R. Decomposition theorems for Bergman spaces and their applications // Operator and Functional Theory. Proc. NATO Adv. Study Inst. (Lancaster, July 16–24, 1984): D. Reidel Publ. Company, 1985. P. 225–277.
[5] Пекарский А. А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации // Матем. сб. 1984. Т. 124. №4. С. 571–588.
[6] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
[7] Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin: Spinger-Verlag, 1996.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
E-mail: vuv@univer.belpak.grodno.by

Поступило
10.09.1998