Математические заметки

том 76 выпуск 2 август 2004

УДК 517.53

НАИЛУЧШИЕ РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ОРТОПРОЕКЦИЙ

А. А. Пекарский

Пусть $C[-1,1]$ – банахово пространство непрерывных комплексных функций f на отрезке $[-1,1]$, наделенных стандартной максимум-нормой $\|f\|$; $\omega(\,\cdot\,)=\omega(\,\cdot\,,f)$ – модуль непрерывности f; $R_n=R_n(f)$ – наилучшее равномерное приближение f посредством рациональных функций (р.ф.) степени не выше $n=1,2,\dots$. Пространство $C[-1,1]$ рассматривается так же, как предгильбертово относительно скалярного произведения $(f,g)=(1/\pi)\int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}(1-x^2)^{-1/2}\,dx$. Пусть $\mathbf{z}_n=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ – набор точек, лежащих вне отрезка $[-1,1]$. Через $\mathscr{F}(\,\cdot\,,f,\mathbf{z}_n)$ обозначим ортопроектор, действующий из предгильбертова пространства $C[-1,1]$ в его $(n+1)$-мерное подпространство, состоящее из р.ф., полюсами которых (с учетом кратности) могут быть лишь точки набора $\mathbf{z}_n$. В работе показано, что если f не является р.ф. степени $\leqslant n$, то можно указать набор точек $\mathbf{z}_n=\mathbf{z}_n(f)$ такой, что

$$\|f(\,\cdot\,)-\mathscr{F}(\,\cdot\,,f,\mathbf{z}_n)\|\leqslant 12R_n\ln\frac{3}{\omega^{-1}(R_n/3)}.$$

Библиография: 11 названий.

1. Постановка задачи. Основной результат и следствия. Пусть X – одно из следующих банаховых пространств: $C[-1,1]$ – пространство комплексных непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$; $C(T)$ – пространство комплексных непрерывных функций на окружности $T=\{z:|z|=1\}$; C_A – пространство функций, аналитических в круге $D=\{z:|z|<1\}$ и непрерывных в его замыкании $\overline{D}=D\cup T$. Пространство X наделяется стандартной максимум-нормой $\|\cdot\|=\|\cdot\|_X$.

Каждое из пространств X будем рассматривать как предгильбертово. При этом в $C(T)$ и C_A скалярное произведение (f,g) функций f и g определяется следующим образом:

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_T f(z)\overline{g(z)}\,|dz|.$$

В пространстве $C[-1,1]$ скалярное произведение определяется так:

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 f(x)\overline{g(x)}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\qquad f,g\in C[-1,1].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российско-Белорусского фонда фундаментальных исследований, грант № Ф02Р-057.

Через $\mathscr{R}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, будем обозначать множество всех рациональных функций (р.ф.) r степени не выше n ($\deg r \leqslant n$). Пусть $\mathbf{z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ – некоторый набор точек из расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Через $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$ обозначим $(n+1)$-мерное линейное пространство р.ф., полюсами которых с учетом кратности могут быть лишь точки множества $\mathbf{z}_n$.

Пусть $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n) \subset X$. Через $\mathscr{F}(\,\cdot\,, \,\cdot\,, \mathbf{z}_n, X)$ будем обозначать ортопроектор, действующий из предгильбертова пространства X в его $(n+1)$-мерное подпространство $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$. Именно, если $f \in X$, то $\mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, X) \in \mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$ и $f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, X) \perp \mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$.

Рассмотрим следующие примеры. Если $X = C_A$ и $z_k = \infty$ при $k = 1, \dots, n$, то $\mathscr{F}(z, f, \mathbf{z}_n, C_A)$ совпадает с n-й частичной суммой ряда Маклорена функции f. Если $X = C(T)$, $z_k = 0$ при $k = 1, \dots, m$ и $z_k = \infty$ при $k = m+1, \dots, 2m$, то $\mathscr{F}(z, f, \mathbf{z}_{2m}, C(T))$ есть m-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f. Если $X = C[-1,1]$ и $z_k = \infty$ при $k = 1, \dots, n$, то $\mathscr{F}(x, f, \mathbf{z}_n, C[-1,1])$ совпадает с n-й частичной суммой ряда Фурье функции f по многочленам Чебышева первого рода.

В общем случае для каждого из пространств X и каждого набора $\mathbf{z}_n$, $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n) \subset X$, построены соответствующие ортогональные системы р.ф. Именно, для $C(T)$ и C_A это сделали Такенака и Мальмквист [1], а для $C[-1,1]$ – Джрбашян и Китбалян [2].

В данной работе мы изучаем порядок равномерных приближений функций из X посредством их ортопроекции на $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$. При этом полюсы $\mathbf{z}_n$ выбираются в зависимости от f.

Для $f \in X$ введем $R_n = R_n(f, X)$ – наилучшее равномерное приближение посредством множества $\mathscr{R}_n$, т.е.

$$R_n = R_n(f, X) = \inf\bigl\{\|f - r\| : r \subset \mathscr{R}_n \cap X\bigr\}.$$

Пусть f принадлежит $C[-1,1]$ или C_A, а K – это отрезок $[-1,1]$ или круг $\overline{D}$ соответственно. В этом случае *модулем непрерывности* функции f называется функция

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \max\bigl\{|f(z_1) - f(z_2)| : z_1, z_2 \subset K;\ |z_1 - z_2| \leqslant \delta\bigr\}, \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant 2.$$

Если же $f \in C(T)$, то ее модуль непрерывности определяется так:

$$\omega(\delta) = \omega(\delta, f) = \max\bigl\{|f(e^{it_1}) - f(e^{it_1})| : t_1, t_2 \subset \mathbb{R};\ |t_1 - t_2| \leqslant \delta\bigr\}, \qquad \delta \geqslant 0.$$

В последнем случае, очевидно, $\omega(\delta) = \omega(\pi)$ при $\delta \geqslant \pi$.

Как известно (см., например, [3]), функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет следующим условиям: $\omega(0) = 0$, ω непрерывна и не убывает на области определения. Пусть $f \neq \mathrm{const}$. Тогда $\omega(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, и мы можем ввести обратную функцию

$$\omega^{-1}(y) = \min\{\delta \geqslant 0 : \omega(\delta) = y\}.$$

Здесь y берется из области значений функции $\delta \mapsto \omega(\delta)$.

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть* $f \in X \setminus \mathscr{R}_n$, $n \geqslant 1$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$ *и* $R_n = R_n(f, X)$. *Тогда существует набор точек* $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ *такой, что*

$$\|f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, X)\| \leqslant 12 R_n \ln \frac{3}{\omega^{-1}(R_n/3)}. \tag{1}$$

Легко заметить, что правая часть неравенства (1) является бесконечно малой при $n \to \infty$ лишь в случае, когда выполнено условие Дини, т.е.

$$\omega(\delta) = o\biggl(\Bigl(\ln \frac{1}{\delta}\Bigr)^{-1}\biggr) \quad \text{при} \ \ \delta \to 0.$$

Используя теорему 1 и известные верхние оценки $R_n(f, X)$ для различных классов функций, можно получить как новые результаты, так и результаты Русака [4], [5] и некоторые результаты автора и Ровбы [6] о порядке наилучших рациональных приближений функций посредством ортопроекции. Ограничимся формулировкой четырех следствий. Необходимые оценки $R_n(f, X)$ имеются в [7], [8].

Следствие 1. *Пусть функция* $f \in C_A$ *имеет ограниченную вариацию на* T *и существует* $\alpha \in (0,1)$ *такое, что* $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ *при* $\delta \to 0$. *Тогда можно указать последовательность* $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, *для которой*

$$\|f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| = o\biggl(\frac{\ln n}{n}\biggr) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие 2. *Пусть функция* $f \in C_A$ *имеет ограниченную вариацию на* T *и существует* $\gamma > 1$ *такое, что* $\omega(\delta, f) = O[(\ln(1/\delta))^{-\gamma}]$ *при* $\delta \to 0$. *Тогда можно указать последовательность* $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, *для которой*

$$\|f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| = o(n^{-(\gamma-1)/\gamma}) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие 3. *Пусть функция* $f \in C[-1,1]$ *имеет ограниченную вариацию на* $[-1,1]$ *и существует* $\alpha \in (0,1)$ *такое, что* $\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$ *при* $\delta \to 0$. *Тогда можно указать последовательность* $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, *для которой*

$$\bigl\|f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, C[-1,1])\bigr\| = O\biggl(\frac{\ln^2 n}{n}\biggr) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следствие 4. *Пусть функция* $f \in C[-1,1]$ *имеет ограниченную вариацию на* $[-1,1]$ *и существует* $\gamma > 1$ *такое, что* $\omega(\delta, f) = O[(\ln(1/\delta))^{-\gamma}]$ *при* $\delta \to 0$. *Тогда можно указать последовательность* $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, $n = 1, 2, \dots$, *для которой*

$$\bigl\|f(\cdot) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, C[-1,1]\bigr\| = O(n^{-(\gamma-1)/(\gamma+1)}) \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Рациональная аппроксимация посредством ортопроекции класса функций из следствия 1 рассматривалась Русаком [4], [5]. Им получена оценка вида $O((\ln^2 n)/n)$.

Нам неизвестно, в каких случаях, оценка (1) будет точной в смысле порядка, а также являются ли точными оценки из следствий 1–4. В конце п. 2 приводится оценка для пространства C_A, которая в некоторых случаях является более точной, чем (1) для $X = C_A$. Отметим также, что в [6] выделен класс функций, для которых рациональная аппроксимация посредством ортопроекции дает приближение порядка наилучшего.

2. Схема доказательства теоремы 1. Ортопроекция в пространстве C_A. Через $L(\mathbf{z}_n, X)$ обозначим норму оператора $\mathscr{F}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\mathbf{z}_n,X)$, действующего из банахова пространства X на его $(n+1)$-мерное подпространство $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$. Иначе говоря, $L(\mathbf{z}_n,X)$ – это константа Лебега для соответствующей ортогональной системы. Если $f\in X$, то справедливо неравенство Лебега

$$\|f(\cdot)-\mathscr{F}(\,\cdot\,,f,\mathbf{z}_n,X)\|\leqslant E(f,\mathbf{z}_n,X)\bigl(1+L(\mathbf{z}_n,X)\bigr), \tag{2}$$

где

$$E(f,\mathbf{z}_n,X)=\inf\bigl\{\|f-r\|:r\in\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)\bigr\}$$

– наилучшее равномерное приближение посредством множества $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)$.

Неравенство (2) играет основную роль при доказательстве теоремы 1. Идея состоит в выборе полюсов $\mathbf{z}_n=\mathbf{z}_n(f)$ таким образом, чтобы правая часть (2) была как можно меньше. Ясно, что $E(f,\mathbf{z}_n,X)$ будет минимальным, если в качестве $\mathbf{z}_n$ возьмем полюсы дроби наилучшего приближения, т.е. дроби $r^*\in\mathscr{R}_n$ такой, что $\|f-r^*\|=R_n$ (существование r^* доказано, например, в [1]). Однако при таком выборе $\mathbf{z}_n$ константа Лебега $L(\mathbf{z}_n,X)$ может оказаться очень большой. Поэтому мы выбираем полюсы $\mathbf{z}_n=\mathbf{z}_n(f)$ так, чтобы $E(f,\mathbf{z}_n,X)\leqslant 2R_n$ и $L(\mathbf{z}_n,X)$ при этом была не слишком большой. Реализация этой идеи наиболее проста в случае пространства C_A.

Пусть $X=C_A$ или $C(T)$ и набор точек $\mathbf{z}_n=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ таков, что $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n)\subset X$. В этом случае справедлива [9] следующая оценка константы Лебега:

$$L(\mathbf{z}_n,X)\leqslant 2\ln\biggl(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{|z_k|+1}{\bigl||z_k|-1\bigr|}\biggr). \tag{3}$$

Здесь при $z_k=\infty$ соответствующее слагаемое считается равным единице.

Нам понадобятся следующие варианты теоремы Джексона (см., например, [3, п. 5.5.4]). Если $f\in C(T)$, то для любого $n=0,1,\dots$ существует тригонометрический многочлен u_n степени не выше n, т.е. рациональная функция вида

$$u_n(z)=\sum_{k=-n}^{n}c_kz^k,\qquad c_k=c_k(f),$$

для которого

$$\|f-u_n\|_{C(T)}\leqslant 3\omega\biggl(\frac{1}{n+1},f\biggr). \tag{4}$$

Если же $f\in C_A$, то, как показывает анализ доказательства из [3], можем считать $c_k=c_k(f)=0$ при $k=-1,-2,\dots,-n$. Поэтому, если $f\in C_A$, то для любого $n=0,1,2,\dots$ существует алгебраический многочлен p_n степени не выше n, удовлетворяющий неравенству

$$\|f-p_n\|_{C_A}\leqslant 3\omega\biggl(\frac{1}{n+1},f\biggr). \tag{5}$$

В неравенствах (4) и (5) берутся соответствующие модули непрерывности, введенные в п. 1.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C_A$, *причем* $f \neq \text{const}$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$, $0 < \varepsilon \leqslant \omega(2)$, r *– р.ф. такая, что* $\|f - r\|_{C_A} \leqslant \varepsilon$. *Тогда существует р.ф.* r_ε, *все полюсы которой лежат в области* $|z| > 1 + \omega^{-1}(\varepsilon)$, $\deg r_\varepsilon = \deg r$ *и*

$$\|f - r_\varepsilon\|_{C_A} \leqslant 2\varepsilon. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $\rho = \rho(\varepsilon) = 1/(1 + \omega^{-1}(\varepsilon))$, $f_\varepsilon(z) = f(\rho z)$ и $r_\varepsilon(z) = r(\rho z)$. Очевидно, r_ε – р.ф., все полюсы которой лежат в области $|z| > 1 + \omega^{-1}(\varepsilon)$ и $\deg r_\varepsilon = \deg r$. Покажем, что (6) также выполнено. Действительно,

$$\|f - f_\varepsilon\| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z) - f(\rho z)| \leqslant \omega(1 - \rho) \leqslant \varepsilon,$$
$$\|f_\varepsilon - r_\varepsilon\| = \max_{z \in \overline{D}} |f(\rho z) - r(\rho z)| \leqslant \max_{z \in \overline{D}} |f(z) - r(z)| = \|f - r\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\|f - r_\varepsilon\| \leqslant \|f - f_\varepsilon\| + \|f_\varepsilon - r_\varepsilon\| \leqslant 2\varepsilon$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1 для $X = C_A$. Пусть $r^* \in \mathscr{R}_n \cap C_A$ – дробь наилучшего равномерного приближения функции f, т.е. $\|f - r^*\| = R_n$. Если $\deg r^* = n$, то в качестве $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$ возьмем полюсы р.ф. r^*_ε, построенной согласно лемме 1, при $r = r^*$ и $\varepsilon = R_n$. Если же $\deg r^* = m < n$, то недостающие $n - m$ полюсов будем считать равными ∞. Положим $\delta_n = \omega^{-1}(R_n/3)$ и заметим, что $\delta_n \leqslant \omega^{-1}(R_n)$. С учетом этого из леммы 1 и неравенств (2) и (3) получим

$$\|f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| \leqslant 2R_n\left[1 + 2\,\ln\left(1 + \frac{n(2 + \delta_n)}{\delta_n}\right)\right]. \tag{7}$$

Согласно (5) $R_n \leqslant 3\omega(1/(n+1))$ и, следовательно, $\delta_n \leqslant 1/(n+1)$. Поэтому выражение в квадратных скобках (7) не превышает

$$1 + 2\,\ln\frac{2n+1}{\delta_n} \leqslant 2\,\ln\frac{2\sqrt{e}\,(n+1)}{\delta_n} \leqslant 2\,\ln\frac{2\sqrt{e}}{\delta_n^2} \leqslant 4\,\ln\frac{2}{\delta_n}.$$

Из (7) с учетом последнего неравенства получим (1) для пространства C_A с несколько лучшими константами: 8 и 2 вместо 12 и 3. Теорема 1 для $X = C_A$ доказана.

В случае пространства C_A наряду с (3) имеет место следующая универсальная оценка (см. [10, теоремы 4.1 и 4.4]) константы Лебега: $L(\mathbf{z}_n, C_A) \leqslant 2n + 1$. С учетом (2) находим, что если $f \in C_A$, то для любого $n \geqslant 1$ существует набор точек $\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_n(f)$, для которого

$$\|f(\,\cdot\,) - \mathscr{F}(\,\cdot\,, f, \mathbf{z}_n, C_A)\| \leqslant 2(n+1)R_n(f, C_A).$$

Это неравенство иногда дает лучший результат, чем неравенство (1).

3. Ортопроекция в пространстве $C(T)$. Для $f \in C(T)$ через F обозначим ее гармоническое продолжение в круг $\overline{D}$, т.е. F гармонична в D, непрерывна в $\overline{D}$ и $F(z) = f(z)$ при $z \in T$. Как известно, F в открытом круге D представима с помощью интеграла Пуассона:

$$F(\rho e^{i\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(\tau+t)}) P_\rho(t)\, dt,$$

где $0 \leqslant \rho < 1$, $\tau \in [-\pi, \pi]$ и

$$P_\rho(t) = \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\, \cos t + \rho^2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt \tag{8}$$

– ядро Пуассона.

Во многих работах (см., например, [11]) рассматривалась задача приближения 2π-периодических функций с помощью ее интеграла Пуассона. Оценка, полученная ниже в лемме 2, является менее точной, чем в [11]. Эта оценка приводится с доказательством ради полноты изложения, а также из-за того, что применение оценки (9) для доказательства теоремы 1 значительно проще, чем применение соответствующей оценки из [11].

Лемма 2. *Пусть $f \in C(T)$ и $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$. Тогда при любых $\rho \in [0, 1)$ и $\tau \in [-\pi, \pi]$ имеет место неравенство*

$$|f(e^{it}) - F(\rho e^{it})| \leqslant 3\omega\bigl(\sqrt{2(1-\rho)}\,\bigr). \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку $P_\rho(t) > 0$ и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(t)\, dt = 1,$$

то

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\tau}) - f(e^{i(t+\tau)})| P_\rho(t)\, dt.$$

Сейчас воспользуемся четностью ядра $P_\rho(t)$ относительно t и неравенством

$$|f(e^{i\tau}) - f(e^{i(\tau+t)})| \leqslant \omega(|t|).$$

В результате получим

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \omega(t) P_\rho(t)\, dt.$$

Согласно одному из свойств модуля непрерывности (см., например, [3]) имеет место неравенство

$$\omega(t) \leqslant \omega\bigl(\sqrt{2(1-\rho)}\,\bigr)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2(1-\rho)}}\right).$$

Поэтому

$$|f(e^{i\tau}) - F(\rho e^{i\tau})| \leqslant \frac{\omega(\sqrt{2(1-\rho)}\,)}{\pi} \int_{0}^{\pi} P_\rho(t)\, dt + \frac{\omega(\sqrt{2(1-\rho)}\,)}{\pi\sqrt{2(1-\rho)}} \int_{0}^{\pi} t P_\rho(t)\, dt. \tag{10}$$

Первый из интегралов в (10) равен π. Для второго интеграла найдем подходящую оценку. С этой целью заметим, что согласно правой части (8) имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\,P_\rho(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos t)P_\rho(t)\,dt = \frac{1-\rho}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2 P_\rho(t)\,dt \leqslant \pi\int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\,P_\rho(t)\,dt = \frac{\pi^2}{2}(1-\rho).$$

Используя это и неравенство Буняковского–Коши, получим требуемую оценку второго интеграла из (10):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi tP_\rho(t)\,dt \leqslant \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_\rho(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2P_\rho(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{2(1-\rho)}.$$

Остается подставить в (10) найденные оценки интегралов. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f \in C(T)$, $f \neq \mathrm{const}$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$, $0 < \varepsilon \leqslant \omega(\pi)$ *и р.ф.* r *такая, что* $\|f - r\|_{C(T)} \leqslant \varepsilon$. *Тогда существует р.ф.* r_ε, *удовлетворяющая условиям*: $\deg r_\varepsilon = \deg r$, r_ε *не имеет полюсов в кольце* $\rho \leqslant |w| \leqslant 1/\rho$, *где* $\rho = \rho(\varepsilon) = 1/(1 + (\omega^{-1}(\varepsilon/3))^2/2)$ *и*

$$|f(w) - r_\varepsilon(w)| \leqslant 2\varepsilon \qquad \text{\textit{при}} \quad w \in T. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть F и R – гармоническое продолжение функций f и r соответственно с окружности T в круг $\overline{D}$. Тогда функция $|F(z) - R(z)|$ субгармонична в открытом круге D и непрерывна в его замыкании. Поскольку $|f(z) - r(z)| \leqslant \varepsilon$ при $z \in T$, то из принципа максимума субгармонической функции получим, что $|F(z) - R(z)| \leqslant \varepsilon$ при $z \in \overline{D}$. В частности, при указанном $\rho = \rho(\varepsilon)$ имеем

$$|F(\rho w) - R(\rho w)| \leqslant \varepsilon, \qquad w \in T. \tag{12}$$

Функция $r(z)$ единственным образом представима в виде суммы $r(z) = r_+(z) + r_-(z)$, где r_+ и r_- – р.ф., причем r_+ не имеет полюсов в D, а r_- – в $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ и $r_-(\infty) = 0$. Через $R_+(z)$ и $R_-(z)$ обозначим соответственно гармоническое продолжение r_+ и r_- с T в $\overline{D}$. Поскольку r_+ аналитична в $\overline{D}$, то $R_+(z) = r_+(z)$ при $z \in \overline{D}$.

Рассмотрим функцию $R_-(z)$ при $z \in \overline{D}$. Пусть, например, $r_-(z) = (z - z_0)^{-k}$, где $|z_0| < 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Легко убедиться, что в этом случае

$$R_-(z) = \frac{|z|^{2k}}{(z - |z|^2 z_0)^k} \qquad \text{при} \quad z \in \overline{D}.$$

В общем случае для выяснения структуры $R_-(z)$, $z \in \overline{D}$, нужно $r_-(z)$ разложить в сумму простых дробей и построить гармоническое продолжение для каждой из простых дробей, составляющих $r_-(z)$.

Из равенства $R(z)=R_+(z)+R_-(z)$, $z\in\overline{D}$, и структуры функций $R_+(z)$ и $R_-(z)$ для $z\in\overline{D}$ заключаем, что функция $w\to R(\rho w)$, рассматриваемая лишь на T, совпадает с некоторой р.ф. $r_\varepsilon(w)$ такой, что $\deg r_\varepsilon=\deg r$ и r_ε не имеет полюсов в кольце $\rho\leqslant|w|\leqslant 1/\rho$.

Покажем, что условие (11) также выполнено. Действительно, из условия $\|f-r\|\leqslant\varepsilon$ и неравенств (9), (12) получаем, что при $w\in T$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}|f(w)-r_\varepsilon(w)|=|f(w)-R(\rho w)|&\leqslant|f(w)-F(\rho w)|+|F(\rho w)-R(\rho w)|\\&\leqslant 3\omega\bigl(\sqrt{2(1-\rho)}\,\bigr)+\varepsilon\leqslant\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1 для $X=C(T)$. Пусть $r^*\in\mathscr{R}_n\cap C(T)$ – дробь наилучшего равномерного приближения функции $f\in C(T)\setminus\mathscr{R}_n$. Тогда $R_n=\|f-r^*\|>0$. Если $\deg r^*=n$, то в качестве $\mathbf{z}_n=\mathbf{z}_n(f)$ возьмем полюсы р.ф. r^*_ε, построенной согласно лемме 3 при $r=r^*$ и $\varepsilon=R_n$. В случае $\deg r^*=m<n$ недостающие $n-m$ полюсов будем считать равными ∞. Ради краткости положим $\delta_n=\omega^{-1}(R_n/3)$. Из леммы 3 и неравенств (2), (3) находим, что при указанном выборе $\mathbf{z}_n$ выполняется соотношение

$$\|f(\,\cdot\,)-F(\,\cdot\,,f,\mathbf{z}_n,C(T))\|\leqslant 2R_n\biggl[1+2\,\ln\biggl(1+\frac{n(4+\delta_n^2)}{\delta_n^2}\biggr)\biggr]. \tag{13}$$

Упростим это оценку. Пусть m – целая часть числа $n/2$. Согласно (4) имеем

$$R_n\leqslant 3\omega\biggl(\frac{1}{m+1}\biggr)\leqslant 3\omega\biggl(\frac{2}{n+1}\biggr).$$

Следовательно, $\delta_n\leqslant 2/(n+1)$. С учетом этого выражение в квадратных скобках (13) не превышает

$$1+2\,\ln\frac{4n+(n+1)\delta_n^2}{\delta_n^2}\leqslant 1+2\,\ln\frac{4(n+1)}{\delta_n^2}\leqslant 2\,\ln\frac{8\sqrt{e}}{\delta_n^3}\leqslant 6\,\ln\frac{3}{\delta_n}.$$

Этим теорема 1 для пространства $C(T)$ доказана.

4. Ортопроекция в пространстве $C[-1,1]$**.** Введем функцию Жуковского

$$z=\varphi(w)=\frac{1}{2}\biggl(w+\frac{1}{w}\biggr)$$

и ее обратную функцию

$$w=\psi(z)=z+\sqrt{z^2-1}.$$

Ветвь корня квадратного выбрана так, чтобы $|\psi(z)|>1$ при $z\notin[-1,1]$. При таком выборе ветви мы имеем взаимно конформные отображения областей $\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{D}$ и $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$. Если границу области $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$ считать состоящей из двух экземпляров отрезков $[-1,1]$ (верхнего и нижнего), то будем иметь также гомеоморфное соответствие замыканий указанных областей.

Лемма 4. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, *причем* $f \neq \text{const}$, $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$, $0 < \varepsilon \leqslant \omega(2)$, r – *р.ф. такая, что* $\|f - r\|_{C[-1,1]} \leqslant \varepsilon$. *Тогда существует р.ф.* r_ε, *удовлетворяющая условиям:* $\deg r_\varepsilon = \deg r$, *все полюсы* r_ε *лежат вне эллипса* $|\psi(z)| \leqslant 1 + (\omega^{-1}(\varepsilon/3))^2/2$ *и*

$$\|f - r_\varepsilon\|_{C[-1,1]} \leqslant 2\varepsilon.$$

Доказательство. Положим $g(w) = f[\varphi(w)]$, $w \in T$, и $u(w) = r[\varphi(w)]$, $w \in \mathbb{C}$, и применим к этим функциям лемму 3. В результате получим, что существует р.ф. u_ε, удовлетворяющая условиям: $\deg u_\varepsilon = \deg u$, u_ε не имеет полюсов в кольце $\rho \leqslant |\omega| \leqslant 1/\rho$, где $\rho = \rho(\varepsilon) = 1/(1 + (\omega^{-1}(\varepsilon/3))^2/2)$ и

$$|g(w) - u_\varepsilon(w)| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{при} \quad w \in T. \tag{14}$$

Здесь ω^{-1} – функция, обратная к функции $\omega(\delta) = \omega(\delta, f)$. Замена $\omega^{-1}(\delta, g)$ на $\omega^{-1}(\delta, f)$ при применении леммы 3 законна ввиду неравенства $\omega(\delta, g) \leqslant \omega(\delta, f)$, $\delta \in [0, 2]$.

Сделаем в (14) обратную замену $w = \psi(x)$, $x \in [-1, 1]$. В результате получим, что

$$\bigl|f(x) - u_\varepsilon[\psi(x)]\bigr| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{при} \quad x \in [-1, 1].$$

Таким образом, нам остается показать, что функция $r_\varepsilon(x) = u_\varepsilon[\psi(x)]$ является р.ф. степени $\deg r$ и не имеет полюсов в области $|\psi(z)| \leqslant 1/\rho$.

Пусть все полюсы р.ф. r простые и не равны ∞. Общий случай можно получить отсюда с помощью предельного перехода. Очевидно, что оператор перехода от r к r_ε линеен и переводит константы в константы. Поэтому нам достаточно показать, что если $r(x) = 1/(x - z_0)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, то $r_\varepsilon(x)$ является р.ф. первой степени с полюсом в области $|\psi(z)| > 1/\rho$.

Положим $w_0 = \psi(z_0)$. Ввиду соглашения о выборе ветви функции ψ имеем $|w_0| > 1$. Несложные вычисления показывают, что

$$u(w) = r[\varphi(w)] = \frac{1}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} = \frac{2w_0^2}{w_0^2 - 1}\left(\frac{w_0}{w - w_0} - \frac{1}{ww_0 - 1}\right).$$

Следовательно, гармоническое продолжение $U(w)$ функции $u(w)$ с T в $\overline{D}$ будет равно

$$U(w) = \frac{2w_0^2}{w_0^2 - 1}\left(\frac{w_0}{w - w_0} - \frac{|w|^2}{ww_0 - |w|^2}\right), \qquad w \in \overline{D}.$$

Заменим здесь w на ρw и будем считать $w \in T$. После несложных преобразований находим

$$U(\rho w) = \frac{w_0^2 - \rho^2}{\rho(w_0^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\varphi(w) - \varphi(w_0/\rho)}, \qquad w \in T.$$

Следовательно,

$$r_\varepsilon(x) = \frac{w_0^2 - \rho^2}{\rho(w_0^2 - 1)} \cdot \frac{1}{x - \varphi(w_0/\rho)}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Лемма 4 доказана.

Пусть набор точек $\mathbf{z}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ такой, что $\mathscr{R}(\mathbf{z}_n) \in C[-1,1]$. В этом случае аналог неравенства (3) выглядит так [2]:

$$L(\mathbf{z}_n, C[-1,1]) \leqslant 2\,\ln\biggl(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi(z_k)|+1}{|\psi(z_k)|-1}\biggr). \tag{15}$$

Напомним также неравенство Джексона для пространства $C[-1,1]$. Если $f \in C[-1,1]$ и $n = 0, 1, 2, \dots$, то существует алгебраический многочлен p_n, $\deg p_n \leqslant n$, для которого

$$\|f - p_n\|_{C[-1,1]} \leqslant 3\omega\biggl(\frac{1}{n+1}, f\biggr). \tag{16}$$

Доказательство теоремы 1 для $X = C[-1,1]$ проводится по той же схеме, что и для $X = C_A$ и $C(T)$. Нужный результат следует из леммы 4, неравенств (2), (15) и (16). Теорема 1 доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.

[2] Джрбашян М. М., Китбалян А. А. Об одном обобщении полиномов Чебышева // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 37. №5. С. 263–270.

[3] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: ГИФМЛ, 1960.

[4] Русак В. Н. О скорости приближения некоторых классов функций рациональными операторами. Теория приближения функций // Труды Международной конференции по теории приближения функций. Киев, 31 мая–5 июня, 1983. М., 1987. С. 382–386.

[5] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Дисс. … докт. физ.-мат. наук. Киев: 1987.

[6] Пекарский А. А., Ровба Е. А. Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. №3. С. 362–368.

[7] Пекарский А. А. Чебышевские рациональные приближения в круге на окружности и на отрезке // Матем. сб. 1987. Т. 133. №1. С. 86–102.

[8] Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin: Springer, 1996.

[9] Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1956. Т. 9. №7. С. 3–28.

[10] Пекарский А. А. Оценки производной интеграла типа Коши с мероморфной плотностью и их приложения // Матем. заметки. 1982. Т. 31. №3. С. 389–402.

[11] Ульянов П. Л. О приближении функций // Сиб. матем. ж. 1964. Т. 5. №2. С. 418–437.

Белорусский государственный технологический университет
E-mail: `pekarski@bstu.unibel.by`

Поступило
06.05.2002