МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 39, № 3 (1986)

ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В L_p [—1,1]

А. А. Пекарский

1. Пусть Γ — спрямляемая кривая в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $0 < p \leqslant \infty$. Через $L_p(\Gamma)$ обозначим пространство Лебега комплекснозначных функций f на Γ, наделенных квазинормой

$$\|f\|_{p,\Gamma} = \left(\int_\Gamma |f(\xi)|^p\,|d\xi|\right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty),$$

$$\|f\|_{\infty,\Gamma} = \sup_{\xi \in \Gamma} \operatorname{vrai} |f(\xi)| \qquad (p = \infty).$$

Для краткости полагаем $L_p[-1, 1] = L_p$ и $\|f\|_{p,[-1,1]} = \|f\|_p$.

Е. П. Долженко [1] показал, что если r — рациональная функция степени n ($n \geqslant 1$) все полюсы которой лежат вне отрезка $[-1, 1]$, то

$$\|r'\|_1 \leqslant cn\,\|r\|_\infty\,^{1)}. \tag{1}$$

Е. А. Севастьянов [2] получил следующее обобщение неравенства (1):

$$\|r^{(s)}\|_{\sigma-\varepsilon} \leqslant c(s, p, \varepsilon)\, n^s\, \|r\|_p, \tag{2}$$

где $s \in \mathbf{N}$, $0 < p \leqslant \infty$, $\sigma = (s + p^{-1})^{-1}$ и $\varepsilon \in (0, \sigma)$. В [2] отмечается также, что неравенство (2) не имеет места для $\varepsilon < 0$ при любых s и p. В случае $p^{-1} \in \mathbf{N}$ оно неверно также при $\varepsilon = 0$ и любом s. Автором [3] показано,

---

$^{1)}$ Здесь $c > 0$ — абсолютная постоянная. Ниже через $c(\ldots)$, $c_1(\ldots)$, $c_2(\ldots)$,... будем обозначать некоторые положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

что в случае окружности $T = \{\xi \in \mathbf{C}: |\xi| = 1\}$ и отрезка $[-1, 1]$ неравенство типа (2) имеет место с $\varepsilon = 0$ при $p = \infty$ и любом s. При этом в [3] существенно применялись результаты В. Н. Русака об оценках производных рациональной функции и ее сопряженной (см. [4, гл. 1, §§ 2 и 3]). Из результатов В. Н. Русака следует также принципиальная возможность выполнения неравенства типа (2) с $\varepsilon = 0$ при $p \geqslant 2$ на окружности T. Именно, если рациональная функция r степени n не имеет полюсов на T, то из равенств (10) и (20) гл. III из [4] можно получить соотношение

$$\| r' \|_{\frac{p}{p+1}, T} \leqslant c(p)\, n^{1+\frac{1}{p}} \| r \|_{p, T}, \qquad p \geqslant 2.$$

Неравенство типа (2) для окружности с $\varepsilon = 0$ при любых $s \in \mathbf{N}$ и $1 < p < \infty$ получено автором в [5]. Цель настоящей работы: показать, что аналогичный результат имеет место и для отрезка. Приводимое здесь доказательство включает также рассмотренный в [3] случай $p = \infty$ и основанно, как и в [5], на представлении рациональной функции в виде интегралов с ядрами специального вида. Впервые подобные представления при оценках производных рациональных функций появились в работах В. Н. Русака (см. [4, гл. III]). Заметим также, что в [4] нужное интегральное представление основанно на ортогональной системе Такенака—Мальмквиста, а в [5] и настоящей работе — на интегральной формуле Коши.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть r — рациональная функция степени n $(n \geqslant 1)$ все полюсы которой лежат вне отрезка $[-1, 1]$, $s \in \mathbf{N}$, $1 < p \leqslant \infty$ и $\sigma = (s + p^{-1})^{-1}$. Тогда*

$$\| r^{(s)} \|_{\sigma} \leqslant c(s, p)\, n^s \| r \|_p.$$

2. Для доказательства теоремы 1 введем следующие обозначения:

$$D_+ = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}, \quad D_- = \{z \in \mathbf{C}: |z| > 1\},$$

$$T_\pm = \{\xi \in T: \pm \operatorname{Im} \xi > 0\}.$$

По заданным числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, принадлежащим кругу D_+, определим функции

$$B(z) = \prod_{k=0}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z} \qquad (a_0 = 0),$$

$$K_\alpha(\xi, z) = \left| \frac{B(\xi) - B(z)}{\xi - z} \right|^{\alpha+1} \qquad (\alpha > 0),$$

$$\lambda(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1 - |a_k|}{|z - a_k|} \right)^{\beta} \frac{1}{|z - a_k|} \qquad (\beta > 0).$$

В наших рассуждениях число β, входящее в определение функции $\lambda(z)$, будет зависеть лишь от α.

ЛЕММА 1 [5]. *Если $\alpha > 0$ и $\beta = (\alpha + 2)^{-1}$, то при любом $z \in T$*

$$\int_T K_\alpha(\xi, z)\, |d\xi| \leqslant c(\alpha)\, \lambda^\alpha(z).$$

ЛЕММА 2. *Если $\alpha > 0$ и $z \in T \setminus \{\pm 1\}$, то*

$$\int_T K_\alpha(\xi, z)\, K_\alpha(\xi, \bar{z})\, |1 - \xi^2|\, |d\xi| \leqslant$$
$$\leqslant c(\alpha)\, |1 - z^2|^{-\alpha} (\lambda^\alpha(z) + \lambda^\alpha(\bar{z})). \qquad (3)$$

Доказательство. Покажем сначала, что имеет место неравенство

$$|1 - \xi^2| \,/\, |\xi - \bar{z}|^{\alpha+1} \leqslant 2^{\alpha+1} \,/\, |1 - z^2|^\alpha \quad (z, \xi \in T_+). \qquad (4)$$

Действительно, рассматривая трапецию с вершинами в точках z, $\bar{z}$, ξ и $\bar{\xi}$ находим, что $|1 - z^2| = |z - \bar{z}|$ и $|1 - \xi^2| = |\xi - \bar{\xi}|$ — ее основания, а $|\xi - \bar{z}|$ — ее диагональ. Отсюда немедленно получаем (4).

Не ограничивая общности, можем считать, что $z \in T_+$. Тогда из леммы 1 и неравенства (4) получим

$$\int_{T_+} K_\alpha(\xi, z)\, K_\alpha(\xi, \bar{z})\, |1 - \xi^2|\, |d\xi| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2\alpha+2} |1 - z^2|^{-\alpha} \int_{T_+} K_\alpha(\xi, z)\, |d\xi| \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\alpha)\, |1 - z^2|^{-\alpha} \lambda^\alpha(z). \qquad (5)$$

Аналогично находим, что

$$\int_{T_-} K_\alpha(\xi, z)\, K_\alpha(\xi, \bar{z})\, |1 - \xi^2|\, |d\xi| \leqslant c_1(\alpha)\, |1 - z^2|^{-\alpha} \lambda^\alpha(\bar{z}). \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует неравенство (3). Лемма доказана.

Пусть G — внешность отрезка $[-1, 1]$ и Γ — граница G; т. е. Γ состоит из двух отрезков $[-1, 1]$, один из которых считается верхним, а другой — нижним. Через

$$\varphi(\eta) = \eta + \sqrt{\eta^2 - 1}$$

обозначим функцию конформно отображающую G на D_-. Если $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ принадлежат G, то положим

$$a_k = 1/\overline{\varphi(\eta_k)} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Определим функцию

$$Q_\alpha(\eta, x) = \frac{|B(\varphi(\eta)) - B(\varphi(x))|^{\alpha+1}\, |B(\varphi(\eta)) - B(\overline{\varphi(x)})|^{\alpha+1}}{|\eta - x|^{\alpha+1}},$$

где $\eta, x \in \Gamma$, $\alpha > 0$ и B — определенное ранее произведение Бляшке.

ЛЕММА 3.

$$\int_\Gamma \left(\int_\Gamma Q_\alpha(\eta, x)\, |d\eta|\right)^{1/\alpha} |dx| \leqslant c(\alpha)\, n. \tag{7}$$

Доказательство. Делая в (7) замену

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

и

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

где z и $\xi \in T$, получим, что оно равносильно неравенству

$$\int_T \left(\int_T K_\alpha(\xi, z)\, K_\alpha(\xi, \bar{z})\, |1 - \xi^2|\, |d\xi|\right)^{1/\alpha} |1 - z^2|\, |dz| \leqslant c(\alpha)\, n,$$

которое немедленно следует из леммы 2.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\alpha > 0$, $1 < p \leqslant \infty$, $\sigma = (\alpha + p^{-1})^{-1}$ *и* $f \in L_p$. *Если*

$$g(x) = \int_\Gamma f(\eta)\, Q_\alpha(\eta, x)\, |d\eta|,$$

то $\| g \|_{\sigma, \Gamma} \leqslant c(\alpha, p)\, n^\alpha\, \| f \|_{p, \Gamma}$.

Доказательство основано на лемме 3 и проводится аналогично как и доказательство леммы 2.4 из [5].

Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho > 1$ такое, что полюсы r лежат во внешности эллипса $\Gamma_\rho = \{\eta\colon |\varphi(\eta)| = \rho\}$. Из интегральной формулы Коши получим

$$r^{(s)}(x) = \frac{s!}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{r(\eta)\, d\eta}{(\eta - x)^{s+1}} \qquad (x \in \Gamma). \tag{8}$$

Если $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ полюсы r (каждый полюс выписан столько раз, какова его кратность), то функция $r(\eta)/$

$/B(\varphi(\eta))$ аналитична в G и ∞ является для нее нулем не ниже первого порядка. Поэтому

$$0=\frac{s!}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{r(\eta)}{(\eta-x)^{s+1}}\left[1-\left(1-\frac{B(\varphi(x))}{B(\varphi(\eta))}\right)^{s+1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{B\overline{(\varphi(x))}}{B(\varphi(\eta))}\right)^{s+1}\right]d\eta. \qquad (9)$$

Устремляя ρ к $1+0$, из (8) и (9) получим

$$|r^{(s)}(x)|\leqslant\frac{s!}{2\pi}\int_\Gamma|r(x)|Q_s(\eta, x)|d\eta| \qquad (x\in\Gamma).$$

Итак, из последнего неравенства и леммы 4 следует теорема 1.

3. Здесь мы применим теорему 1 к доказательству одной обратной теоремы рациональной аппроксимации и изучению связи между наилучшими рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями. При этом будем рассматривать лишь действительнозначные функции.

Модулем изменения функции $f\in L_p$ порядка s $(s\in\mathbf{N})$ называем следующую характеристику (в случае $p=\infty$ см., например, [6, 7] и [3])

$$\varkappa_{s,p}(n, f)\leqslant\sup\left\{\sum_{k=1}^n(E_s(f, L_p(I_k)))^\sigma\right\}^{1/\sigma},$$

где верхняя грань берется по всем наборам попарно непересекающихся отрезков $I_1, I_2, \ldots, I_n$, принадлежащих $[-1, 1]$, $E_s(f, L_p(I_k))$ — наилучшее приближение f в $L_p(I_k)$ полиномами степени не выше $s-1$ и $\sigma=(s+p^{-1})^{-1}$.

ЛЕММА 5. *Пусть m, n и $s\in\mathbf{N}$, $1<p\leqslant\infty$ и r — рациональная функция степени m, все полюсы которой лежат вне отрезка $[-1, 1]$. Тогда*

$$\varkappa_{s,p}(n, r)\leqslant c(s, p)\,m^s\,\|r\|_p.$$

Доказательство. Пусть I_k $(k=1, \ldots, n)$ — некоторые попарно непересекающиеся отрезки, принадлежащие $[-1, 1]$. Множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ разобьем на подмножества A и B следующим образом: считаем $k\in A$, если $r^{(s)}(x)$ монотонна на I_k и $k\in B$ в противном случае. Так как $r^{s+1}(x)$ имеет не более $m(s+1)$ нулей, то множество B состоит не более чем из $m(s+1)$ элементов. Следовательно, применяя неравенство Гёльдера при $\sigma=$

$= (s + p^{-1})^{-1}$ получим

$$\left\{\sum\nolimits'_{k\in B} (E_s(r, L_p(I_k)))^\sigma\right\}^{1/\sigma} \leqslant \left\{\sum\nolimits'_{k\in B} \| r \|^\sigma_{p, I_k}\right\}^{1/\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum\nolimits_{k\in B} 1\right\}^s \left\{\sum\nolimits'_{k\in B} \| r \|^p_{p, I_k}\right\}^{1/p} \leqslant c_1(s)\, m^s \| r \|_p. \qquad (10)$$

Если же $k \in A$, т. е. $r^{(s)}(x)$ монотонна на I_k, то согласно лемме 2.4 из [8]

$$E_s(r, L_p(I_k)) \leqslant \frac{1}{s!} \| r^{(s)} \|_{\sigma, I_k}.$$

Следовательно, из теоремы 1 получим

$$\left\{\sum\nolimits'_{k\in A}(E_s(r, L_p(I_k)))^\sigma\right\}^{1/\sigma} \leqslant c_2(s)\, m^s \| r \|_p. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) следует утверждение леммы 5.

Через $R_n(f, L_p)$ и $E_n^{(s)}(f, L_p)$ (n, $s \in \mathbf{N}$, $f \in L_p$) обозначим соответственно наилучшее приближение f в L_p рациональными функциями степени не выше $n - 1$ и функциями, состоящими не более чем из n кусков полиномов степени не выше $s - 1$.

На основании леммы 5 стандартным методом С. Н. Бернштейна доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Если* $1 < p \leqslant \infty$, s *и* $n \in \mathbf{N}$, $\sigma = (s + p^{-1})^{-1}$ *и* $f \in L_p$, *то*

$$\varkappa_{s, p}(n, f) \leqslant c(s, p) \left\{\sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (k^s R_k(f, L_p))^\sigma\right\}^{1/\sigma}.$$

Из неравенства $E_n^{(s)}(f, L_p) \leqslant n^{-s}\varkappa_{s, p}(n, f)$ (см. также [6, 7] и [3]) и теоремы 2 немедленно следует

ТЕОРЕМА 3. *Если* $1 < p \leqslant \infty$, s *и* $n \in \mathbf{N}$, $\sigma = (s + p^{-1})^{-1}$ *и* $f \in L_p$, *то*

$$E_n^{(s)}(f, L_p) \leqslant \frac{c(s, p)}{n^s} \left\{\sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (k^s R_k(f, L_p))^\sigma\right\}^{1/\sigma}.$$

Следствие. *Если* $R_n(f, L_p) = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 0$, *то*

$$E_n^{(s)}(f, L_p) = O(n^{-\alpha}), \text{ если } \alpha < s,$$

$$E_n^{(s)}(f, L_p) = O(n^{-s} \ln^{s+1/p} n), \text{ если } \alpha = s,$$

$$E_n^{(s)}(f, L_p) = O(n^{-s}), \text{ если } \alpha > s.$$

Отметим, что теоремы 2 и 3 при $s = 1$ и $p = \infty$ получены В. А. Поповым [6], при $s \in \mathbf{N}$ и $p = \infty$ автором [3]. П. П. Петрушев [9] получил оценки сверху $E_n^{(s)}(f, L_q)$

$(R_n(f, L_q))$ через $R_n(f, L_p)$ $(E_n^{(s)}(f, L_p))$ при условии $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$.

Теоремы 2 и 3 в силу доказанных в [5] неравенств для производных рациональных функций, очевидно, справедливы и для пространства $L_p(T)$. Это отмечается также в работе автора [10].

Гродненский государственный университет

Поступило 17.10.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Долженко Е. П. Оценки производных рациональных функций.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1962, т. 26, № 1, с. 9—28.

[2] Севастьянов Е. А. Некоторые оценки производных рациональных функций в интегральных метриках.— Математические заметки, 1973, т. 13, вып. 4, с. 499—510.

[3] Пекарский А. А. Оценки высших производных рациональных функций и их приложения.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н., 1980, № 5, с. 21—28.

[4] Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения.— Минск: Изд-во БГУ, 1979, с. 3—176.

[5] Пекарский А. А. Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации.— Мат. сб., 1984, т. 124, № 4, с. 571—588.

[6] Popov V. A. On the connectionl between rationa and spline approximation.— Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., 1974, v. 27, № 5, p. 623—626.

[7] Bergh J., Peetre J. On the spaces V_p $(0 < p \leqslant \infty)$.— Bull. Unione Math. Ital. Ser. 4, 1974, v. 10, № 3, p. 632—648.

[8] Burchard H. G., Hale D. F. Piecewise polinomial approximation on optimal maghes 9. J. Approximation Theory, 1975, v. 14, № 2, p. 128—147.

[9] Петрушев П. П. Связи между наилучшими рациональными и сплайн приближениями в метрике L_p — ПЛИСКА Бълг. мат. студии, 1983, № 5, с. 68—83.

[10] Пекарский А. А. Рациональные приближения класса H_p, $0 < p \leqslant \infty$.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 9—12.