УДК 512.543.76

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ В ОБОБЩЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУППАХ ТИПА (2,2k,2)

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Титс [1] доказал, что если Г — линейная группа, то либо Г содержит неабелеву свободную подгруппу, либо Г является почти разрешимой. Если для произвольной группы Г выполнено одно из указанных условий, то говорят, что Г удовлетворяет альтернативе Титса. Большое количество работ, начиная с [2], посвящено исследованию альтернативы Титса для обобщенных треугольных групп, т.е. групп, имеющих копредставление вида

$$\Gamma = < a,b \mid a^m = b^n = R^l(a,b) = 1 >,$$

где $l \geq 2$ и $R(a,b)$ — циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной a, b, не являющееся собственой степенью. Мы будем говорить, что Г имеет тип (m,n,k). Наиболее полный обзор полученных к настоящему времени результатов об обобщенных треугольных группах можно найти в монографии [3]. В [4] выдвинута гипотеза, что для произвольной обобщенной треугольной группы справедлива альтернатива Титса. В настоящее время эта гипотеза доказана для обобщенных треугольных групп всех типов, за исключением $(2,n,2)$, $(3,3,2)$, $(3,4,2)$, $(3,5,2)$. В предлагаемой работе доказывается следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $\Gamma = < a,b \mid a^2 = b^{2k} = R^2(a,b) = 1 >$, *где* $R(a,b) = ab^{u_1} \dots ab^{u_s}$, $0 < u_i < 2k$, $s>4$, $k \geq 4$, $k \neq 5,6,10,15,30$. *Тогда* Г *содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Отметим, что в случае $s \leq 4$ для обобщенной треугольной группы Г типа $(2,n,2)$ справедлива альтернатива Титса [3]. Кроме того, в [5] доказано, что если k делит $d = \sum_{i=1}^{s} u_i$, то для Г также справедлива альтернатива Титса. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что k не делит d. Используемые ниже сведения о характерах Фрике можно найти в [6]. Мы напомним основные обозначения и необходимые нам факты.

Пусть $F_2 = < g,h >$ — свободная группа. Для произвольного элемента $w = w(g,h) \in F_2$ рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w : SL_2(C) \times SL_2(C) \to C, \tau_w(A,B) = tr(w(A,B)).$$

Для произвольного $w \in F_2$ мы имеем $\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh})$, где $Q_W[x,y,z]$ — многочлен с целыми коэффициентами. Функцию τ_W обычно называют характером Фрике, а многочлен Q_W — многочленом Фрике элемента $w \in F_2$. Определим многочлен $P_n(\lambda)$ формулой $P_n(2\cos\varphi) = \sin((n+1)\varphi)/\sin\varphi$, $n \in Z$. Пусть $w = g^{\alpha_1} h^{\beta_1} \dots g^{\alpha_s} h^{\beta_s}$ — циклически редуцированное слово в F_2 и пусть $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$. Рассмотрим многочлен Фрике $Q_W(x,y,z)$ как многочлен от z. Пусть $Q_w(x,y,z) = M_n(x,y)z^n + \dots + M_0(x,y)$. В [7] доказано, что степень многочлена Фрике $Q_W(x,y,z)$ относительно z равна s и $M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{\alpha_i - 1}(x) P_{\beta_i - 1}(y)$. Далее, известно, что для произвольных α,β,γ существуют матрицы $A,B \in SL_2(C)$ такие, что $\tau_g(A,B) = trA = \alpha$, $\tau_h(A,B) = trB = \beta$, $\tau_{gh}(A,B) = trAB = \gamma$. При этом группа $<A,B>$, порожденная A и B, неприводима тогда и только тогда, когда $tr(ABA^{-1}B^{-1}) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta\gamma - 2 \neq 2$. Следующая лемма характеризует элементы конечного порядка в $SL_2(C)$.

Л е м м а 1. *Пусть* $2<m$ *и* $\pm E \neq X \in SL_2(C)$. *Тогда* $X^m = E$ *тогда и только тогда, когда* $tr\,X = 2\cos(2r\pi/m)$ *для некоторого* $r \in \{1,\dots,m-1\}$.

Для доказательства теоремы мы построим представление $\rho : \Gamma \to PSL_2(C)$ такое, что образ $\rho(\Gamma)$ содержит F_2. Ясно, что тогда и Г содержит неабелеву свободную подгруппу. Ключевую роль в доказательстве играет следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $A, B \in SL_2(C)$ *такие матрицы, что tr A=0,* $trB = \beta_r = 2\cos(\frac{r}{2k}\pi)$, $trAB = z_0$, *где* $\frac{r}{2k} = \frac{r'}{l'}, (r', l') = 1, l' > 5$, *а* z_0 — *корень многочлена Фрике* $f_r(z) = Q_r(0, \beta_r, z)$ *такой, что* $z_0 \notin \{0, \pm 2\sin(\frac{r}{2k}\pi)\}$. *Тогда группа* $\Gamma = < a, b \mid a^2 = b^{2k} = R^2(a,b) = 1 >$ *содержит* F_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что группа *G=<A,B>* — неэлементарная подгруппа $SL_2(C)$. Во-первых, *G* неприводима, поскольку

$$trABA^{-1}B^{-1} - 2 = \beta_r^2 + z_0^2 - 4 = z_0^2 - 4\sin^2(\tfrac{r}{2k}\pi)) \neq 0$$

по условию. Во-вторых, *G* неразрешима, поскольку два из трех чисел *tr A, tr B, tr AB* отличны от нуля (см.[7]). Наконец, из описания конечных подгрупп в $SL_2(C)$ [7] следует, что *G* бесконечна, а следовательно содержит F_2. Пусть $\overline{A}, \overline{B}$ — образы *A, B* в $PSL_2(C)$, $\overline{G} = < \overline{A}, \overline{B} >$. Тогда $\overline{G}$ также содержит F_2. Заметим, что по построению $\overline{A}^2 = \overline{B}^{2k} = R^2(\overline{A}, \overline{B}) = 1$ в $PSL_2(C)$, т.е. $\overline{G}$ — гомоморфный образ Г. Следовательно, $F_2 \subset \Gamma$.

Таким образом, чтобы доказать теорему, нам достаточно доказать следующий факт. Пусть Г — группа из теоремы, $\beta_r = 2\cos(\frac{r}{2k}\pi)$, где $\frac{r}{2k} = \frac{r'}{l'}, (r', l') = 1, l' > 5$, и

$$f_r(z) = Q_r(0, \beta_r, z) = \alpha_r(z^s + \gamma_1 z^{s-1} + \cdots + \gamma_s),$$

где старший коэффициент $\alpha_r = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i - 1}(\beta_r)$. Тогда найдется такое *r*, что $\alpha_r \neq 0$ и $f_r(z)$ имеет корень $z_0 \notin \{0, \pm 2\sin(\frac{r}{2k}\pi)\}$. Допустим противное. Тогда мы должны иметь

$$f_r(z) = \alpha_r z^{i_1}(z - 2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi))^{i_2}(z + 2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi))^{i_3} \tag{1}$$

Пусть ε — примитивный корень из 1 степени *4k*. Положим

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^k & 0 \\ 1 & \varepsilon^{-k} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon^r & x \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда *tr A*=0, *tr B*=β_r, $z = trAB = x + 2\cos(\frac{k+r}{2k}\pi) = x - 2\sin(\frac{r}{k}\pi)$. Подставляя в (1), мы имеем

$$f_r(x - 2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi)) = \alpha_r(x - 2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi))^{i_1}(x - 4\sin(\tfrac{r}{2k}\pi))^{i_2} x^{i_3} \tag{3}$$

С другой стороны,

$$f_r(x - 2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi)) = f_r(trAB) = \tau_R(trA, trB, trAB) = trR(A,B) = tr(AB^{u_1} \ldots AB^{u_s}) \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что свободный коффициент последнего многочлена равен

$$\varepsilon^{ks+dr} + \varepsilon^{-(ks+dr)} = 2\cos(\tfrac{ks+dr}{2k}\pi) \neq 0, \tag{5}$$

где $d = \sum_{i=1}^{s} u_i$, поскольку по условию *k* не делит *dr*. Из (3) – (5) следует, что i_3 = 0. Аналогично, рассматривая вместо *A* матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} -\varepsilon^k & 0 \\ 1 & -\varepsilon^{-k} \end{pmatrix}$, получаем i_2 = 0. Таким образом, мы должны иметь

$$f_r(z) = \alpha_r z^s \tag{6}$$

Тогда из (3) – (5), сравнивая свободные коэффициенты, получаем

$$(-1)^s \alpha_r (2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi))^s = 2\cos(\tfrac{ks+dr}{2k}\pi) \tag{7}$$

Поскольку

$$\alpha_r = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i - 1}(2\cos(\tfrac{r}{2k}\pi)) = (2\sin(\tfrac{r}{2k}\pi))^{-s} \prod_{i=1}^{s} 2\sin(\tfrac{u_i r}{2k}\pi)),$$

то (7) можно записать в виде

$$(-1)^s \prod_{i=1}^{s} 2\sin(\tfrac{u_i r}{2k}\pi) = 2\cos(\tfrac{ks+dr}{2k}\pi) \tag{8}$$

Чтобы получить противоречие и завершить доказательство теоремы, нам достаточно доказать следующую лемму.

Л е м м а 2. *Справедливо одно из утверждений.*

1) *Существует эпиморфизм группы* Г *на обобщенную треугольную группу* $\Gamma_1 =< c, g \mid c^2 = g^{2l} = R^2(c,g) = 1 >, l \geq 4,$ *такую, что* Γ_1 *имеет специальное циклическое представление, а следовательно, в силу [5],* Γ_1 *(а поэтому и* Г*) содержит свободную подгруппу* F_2..

2) *Найдется такое* r, $\frac{r}{2k} = \frac{r'}{l'}, (r', l') = 1, l' > 5$*, что левая часть в* (8) *отлична от* 0 *и равенство (8) не имеет места.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы, найдется делитель q числа k такой, что $q \in \{4, 9, 25, p\}$, где $p > 5$ — простое число. Пусть $k=qk_1$. Предположим вначале, что q делит d и рассмотрим группу $\Gamma_1 =< c, g \mid c^2 = g^{2q} = R^2(c,g) = 1 >$, где $R(c,g) = cg^{u_1} \ldots cg^{u_s}$. Произведя циклическую редукцию слова $R(c,g)$ в свободном произведении $< c \mid c^2 = 1 > * < g \mid g^{2q} = 1 >$, мы получим слово $R_1(c,g) = cg^{v_1} \ldots cg^{v_t}$, где $0 < v_i < 2q$. Ясно, что $v_1 + \cdots v_t \equiv d (\mathrm{mod}\, 2q)$, следовательно, q делит $v_1 + \cdots v_t$, и Γ_1 имеет специальное циклическое представление. Отображение $a \to c$, $b \to g$ определяет эпиморфизм Г на Γ_1.

Предположим теперь, что q не делит d.. Дальнейшее доказательство проводится путем сравнения норм левой и правой частей (8) при различных r в подходящем круговом поле. При этом используется следующая лемма. Пусть δ — примитивный корень из 1 степени n, $L_n = Q(\delta + \delta^{-1}) = Q(\cos(\frac{2}{n}\pi))$, p — простое число.

Л е м м а 3. 1) $N_{L_{2p^s}/Q}(2\sin(\frac{r}{p^s}\pi)) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, p > 2 \\ (-1)^{2^{s-1}}, p = 2. \end{cases}$

2) *Если* $i<s$, $(r,p)=1$, *то* $N_{L_{2p^s}/Q}(2\sin(\frac{r}{p^i}\pi)) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p^{s-i}}$.

3) *Если* $n>2$, *n не является простым числом и* $(r,n)=1$, *то* $2\sin(\frac{r}{n}\pi) \in \mathrm{O}^*$, *где* O — *кольцо целых чисел в C.*

Продолжим доказательство леммы 2. Для определенности предположим, что s нечетно и пусть $\frac{u_i}{2k} = \frac{u_i'}{n_i'}$, где $(u_i', n_i') = 1$. Тогда (8) можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^{s} 2\sin(\tfrac{u_i' r}{n_i'}\pi) = (-1)^{s_1} 2\sin(\tfrac{dr}{2k_1 q}\pi) \tag{9}$$

Рассмотрим вначале случай $k = k_1 q = 2^l$. Мы можем предполагать, что 4 не делит d (этот случай рассмотрен выше). Так как $s \geq 5$, то сравнивая нормы левой и правой части (9) при помощи леммы 3 , мы сразу получаем противоречие. Таким образом, мы можем предполагать, что $q > 4$.

Предположим, что $k_1 = 1$. Если найдется $n_i' = 2$, то мы имеем противоречие, поскольку норма левой части (9) делится на 2, а правая часть является единицей Ю. Следовательно, все $n_i' \neq 2$. Пусть q=9 или $q > 5$ — простое число. Положив r=2 и учитывая $s \geq 5$, мы снова получаем противоречие после сравнения норм левой и правой части (9). Наконец, пусть q=25. Положим r=2. Если d не кратно 5, то в точности как и выше имеем противоречие. Наконец, если d кратно 5, то рассмотрим группу $\Gamma_1 =< c, g \mid c^2 = g^{10} = R^2(c,g) = 1 >$. Группа Γ_1 имеет специальное циклическое представление и является эпиморфным образом Г.

Будем теперь предполагать, что $k_1 > 1$. Разберем 2 случая.

1) Существует такое i, что $n_i^{'} \mid k_1$. Пусть $n_j^{'} = \min_i \{n_i^{'}\}$, где $n_i^{'} \mid k_1$, и пусть $n_j^{'} = p_1^{\gamma_1} \dots p_t^{\gamma_t}$ — разложение на простые множители. Положим $r = p_2^{\gamma_2} \dots p_t^{\gamma_t}$,если $t > 2$, и $r = 1$ в противном случае. Тогда

$$2\sin(\tfrac{u_j^{'} r}{n_j^{'}}\pi) = 2\sin(\tfrac{u_j^{'}}{p_1^{\gamma_1}}\pi) \notin \mathrm{O}^* .$$

Далее, для любого i мы имеем $2\sin(\frac{u_i^{'} r}{n_i^{'}}\pi) \neq 0$, т.е. левая часть (9) отлична от 0. С другой стороны, $\frac{r}{2qk_1} = \frac{1}{2qk_2}$, где $2qk_2 > 5$. Кроме того,

$$2\sin(\tfrac{dr}{2qk_1}\pi) = 2\sin(\tfrac{d'}{n'}\pi) \in \mathrm{O}^* ,$$

поскольку $(d', n') = 1$ и $n' > 1$ не является степенью простого числа. Таким образом, правая часть (9) принадлежит O^*, а левая нет — противоречие.

2) Для любого i мы имеем $n_i^{'}$ не делит k_1. Положим $r = r_1 k_1$. Тогда (9) можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^{s} 2\sin(\tfrac{u_i^{''} r_1}{n_i^{''}}\pi) = (-1)^{s_1} 2\sin(\tfrac{dr_1}{2q}\pi) \qquad (10)$$

где $\frac{u_i^{''} r_1}{n_i^{''}} = \frac{u_i^{'} r_1 k_1}{n_i^{'}}$, $(u_i^{''}, n_i^{''}) = 1$. Этот случай мы уже рассмотрели выше. Лемма 2 доказана для нечетного s. Случай четного s разбирается аналогичным образом. Теорема доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы фундаментальных исследований "Математические структуры".

Summary

It is proved the validity of the Tits alternative for generalized triangle groups of type (2,2*k*,2), where $k \geq 4$, $k \neq 5,6,10,15,30$.

Литература

1. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
2. Zieschang H. // Math. Zeit. 1976. V. 151. P. 165-188.
3. Беняш-Кривец В.В. // Матем. сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 13-26.
4. Horowitz R. // Comm. Pure. Appl. Math. 1972. V. 25. P. 635-649.
5. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109-147.
6. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 369-372.
7. Bass H. // The Smith Conjecture. New York: Wiley, 1984. P. 127-136.

Институт математики
НАН Беларуси

Поступило

УДК 512.543.76

Беняш-Кривец В.В. О свободных подгруппах в обобщенных треугольных группах типа (2,2*k*,2). // Доклады Национальной академии наук Беларуси.

В работе исследуется справедливость альтернативы Титса для обобщенных треугольных групп типа (2,2*k*,2). Доказана следующая

Т е о р е м а. *Пусть* $\Gamma =< a,b \mid a^2 = b^{2k} = R^2(a,b) = 1 >$, *где* $R(a,b) = ab^{u_1} \ldots ab^{u_s}$, $0 < u_i < 2k$, *s*>*4*, $k \geq 4$, $k \neq 5,6,10,15,30$. *Тогда* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Библиогр. — 7 назв.

Benyash-Krivets V.V. On free subgroups of generalized triangle groups of type (2,2*k*,2). // Dokl. Acad.Sci. Belarus.

The validity of the Tits alternative for generalized triangle groups of type (2,2*k*,2) is studied in this paper. The following theorem is proved.

T h e o r e m. *Let* $\Gamma =< a,b \mid a^2 = b^{2k} = R^2(a,b) = 1 >$, where $R(a,b) = ab^{u_1} \ldots ab^{u_s}$, $0 < u_i < 2k$, *s*>*4*, $k \geq 4$, $k \neq 5,6,10,15,30$. *Then* Γ *contains a free non-abelian subgroup.*

References - 7 items.

Summary

Доказана справедливость альтернативы Титса для обобщенных треугольных групп типа (2,2k,2), где $k \geq 4$, $k \neq 5,6,10,15,30$.

It is proved the validity of the Tits alternative for generalized triangle groups of type (2,2k,2), where $k \geq 4$, $k \neq 5,6,10,15,30$.

Benyash-Krivetz V.V.
On free subgroups of generalized triangle groups of type $(2,2k,2)$.

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, доктор фи-зи-ко-ма-те-ма-ти-чес-ких наук, старший научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси.

Домашний адрес: 220098 Минск, ул. Рафиева, д. 97, кв. 224.

Рабочий телефон: 284-17-78, домашний телефон: 274-73-36.