Математические заметки

том 65 выпуск 3 март 1999

УДК 517.53

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СТИЛТЬЕСА ПОСРЕДСТВОМ ОРТОПРОЕКЦИИ НА МНОЖЕСТВО РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Пекарский, Е. А. Ровба

Пусть μ — положительная борелевская мера с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset [1,\infty)$ и удовлетворяющая условию $\int (t-1)^{-1}\,d\mu(t) < \infty$. В работе изучается порядок равномерной аппроксимации функции

$$\widehat{\mu} = \int \frac{d\mu(t)}{t-z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

в круге $|z| \leqslant 1$ и на отрезке $[-1,1]$ посредством ортопроекции $\widehat{\mu}$ на множество рациональных функций степени n. При этом полюсы рациональных функций выбираются в зависимости от меры μ. Например, показано, что если $\operatorname{supp}\mu$ компактен и не содержит 1, то такой метод аппроксимации имеет порядок наилучшей. Если же $\operatorname{supp}\mu = [1,a]$, $a > 1$, мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и $\mu'(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ при $t \in [1,a]$ и некотором $\alpha > 0$, то порядок такой аппроксимации отличается от наилучшей разве лишь на $\sqrt{n}$.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть μ – положительная борелевская мера с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Тогда функцию

$$\widehat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t-z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

называют *функцией Гамбургера*; кроме того, если $\operatorname{supp}\mu$ принадлежит одной из полуосей оси $\mathbb{R}$, ее называют *функцией Стилтьеса*, если $\operatorname{supp}\mu$ компактен, – *функцией Маркова*. Изучению наилучших рациональных приближений таких функций посвящены работы [1]–[6] и др.

В настоящей работе предполагается, что $\operatorname{supp}\mu \subset [1,\infty)$ и

$$\int \frac{d\mu(t)}{t-1} < \infty. \tag{1}$$

Нас будет интересовать порядок наилучших равномерных приближений $\widehat{\mu}$ в круге $\Delta := \{z : |z| \leqslant 1\}$ и на отрезке $I := [-1,1]$ посредством ортопроекции $\widehat{\mu}$ на множество рациональных функций степени n. При этом полюсы рациональных функций будут выбираться в зависимости от меры μ. Например, показано, что если $\operatorname{supp}\mu$ компактен и $1 \notin \operatorname{supp}\mu$, то такой метод аппроксимации имеет порядок наилучшей. Если же $\operatorname{supp}\mu = [1,a]$, $a > 1$, мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и $\mu'(t) \asymp (t-1)^{\alpha}$ при $t \in [1,a]$ и некотором $\alpha > 0$, то порядок такой аппроксимации отличается от наилучшей разве лишь на $\sqrt{n}$.

2. Ортопроекция в случае круга. Через C_A обозначим банахово пространство функций f, непрерывных в круге Δ и аналитических в $\operatorname{int}\Delta$, с нормой

$$\|f\| := \|f\|_{C_A} := \max_{z\in\Delta} |f(z)|.$$

Пространство C_A будем рассматривать также как предгильбертово, в котором скалярное произведение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ определяется следующим образом:

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(z)\overline{g(z)}\,|dz|, \qquad f,g\in C_A,$$

где T – граница круга Δ.

Пусть точки $z_1, z_2, \dots, z_n$ принадлежат $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta$. Введем $\mathscr{R}_n = \mathscr{R}_n(z_1, z_2, \dots, z_n)$ – линейное пространство рациональных функций, полюсами которых с учетом кратности могут быть лишь $z_1, z_2, \dots, z_n$. Через F_n обозначим ортопроектор из предгильбертова пространства C_A на $(n+1)$-мерное подпространство $\mathscr{R}_n$. Основным объектом нашего изучения (в случае круга) являются числа

$$\Lambda_n = \Lambda_n(f,\Delta) := \inf \|f - F_n(\,\cdot\,, f)\|, \qquad f\in C_A,$$

где инфимум берется по всем $z_1, z_2, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta$.

Если все $z_k = \infty$, то $F_n(\,\cdot\,, f)$ есть n-я частичная сумма ряда Маклорена функции $f\in C_A$. В общем случае $F_n(z,f)$ можно представить в виде n-й частичной суммы ряда Фурье по ортогональной системе Такенана–Мальмквиста [6]. Для нас же наиболее важной является формула для разности $f(z) - F_n(z,f)$ (см., [7, гл. IX]). Именно, введем

$$B_n(z) := \prod_{k=1}^{n} b(z,t_k), \qquad b(z,t_k) := \frac{z - t_k}{1 - \bar t_k z},$$

– произведение Бляшке порядка n с нулями в точках $t_k\in\operatorname{int}\Delta$. Нужная нам формула имеет вид

$$f(z) - F_n(z,f) = \frac{zB_n(z)}{2\pi i}\int_T \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)\xi B_n(\xi)}, \qquad z\in\operatorname{int}\Delta, \tag{2}$$

где $t_k := 1/\overline{z}_k$, $k = 1,2,\dots,n$. В ее справедливости можно также легко убедиться, исходя из определения скалярного произведения.

При решении поставленной задачи важную роль будут играть числа

$$s_n(\mu) = \inf \int \frac{d\mu(t)}{t(t-1)|B_n(t)|^2}, \tag{3}$$

где инфимум берется по всем $t_1, t_2, \dots, t_n \in \operatorname{int}\Delta$.

Теорема 1. *Если мера μ удовлетворяет условию* (1), *то*

$$\Lambda_n(\widehat{\mu},\Delta) \leqslant 3s_n(\mu), \qquad n = 1,2,\dots. \tag{4}$$

Доказательство. Применяя формулу Фубини, из (1), (2) и определения функции $\widehat{\mu}$, получим

$$\widehat{\mu} - F_n(z,\widehat{\mu}) = zB_n(z)\int \frac{d\mu(t)}{(t-z)tB_n(t)}, \qquad z\in\Delta. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть мера μ удовлетворяет условию* (1) *и* $\operatorname{supp}\mu$ *содержит более* n *точек. Тогда инфимум в* (3) *достигается, по крайней мере, для одной системы попарно различных точек* $t_k =: t_k^*$, *принадлежащих интервалу* $(0,1)$. *При этом функция*

$$I_n(z) := zB_n^*(z)\int\frac{d\mu(t)}{(t-z)tB_n^*(t)},\qquad z\in\Delta,$$

где B_n^* – *произведение Бляшке с нулями в точках* t_k^*, *удовлетворяет условиям*

$$|I_n(z)|\leqslant 3s_n(\mu),\qquad z\in\Delta, \tag{6}$$

$$I_n(z)=B_n^*(z)^2(z-1)\int\frac{(1+t)\,d\mu(t)}{|t-z|^2tB_n^*(t)^2}+B_n^*(z)\int\frac{d\mu(t)}{(t-\overline{z})tB_n^*(t)^3},\qquad z\in T. \tag{7}$$

Доказательство. Для $t\geqslant 1$ и $|\eta|<1$ выполняется неравенство $|b(t,|\eta|)|\geqslant|b(t,\eta)|$. Поэтому $s_n(\mu)$ не изменится, если в (3) вместо $t_k\in\operatorname{int}\Delta$ считать $t_k\in[0,1)$. Далее введем функцию

$$\Phi(t_1,t_2,\dots,t_n)=\int\frac{d\mu(t)}{(t-1)tB_n(t)^2},$$

где нули произведения B_n суть числа $t_k\in[0,1)$, $k=1,2,\dots,n$. Ввиду условия (1) функция Φ по непрерывности продолжается на куб $[0,1]^n$, при этом $b(t,1):=-1$, если $t>1$. Согласно теореме Вейерштрасса функция Φ достигает наименьшего значения в некоторой точке $(t_1^*,t_2^*,\dots,t_n^*)\in[0,1]^n$. Поскольку $|b(t,t_0)|>1=|b(t,1)|$ при $t>1$ и $t_0\in[0,1)$, то все $t_k^*<1$.

Далее покажем, что все $t_k^*>0$. Например, докажем, что $t_1^*>0$. С этой целью рассмотрим функцию

$$\varphi(u)=\int b^{-2}(t,u)\,d\nu(t),\qquad u\in[0,1),$$

где мера ν определяется равенством

$$d\nu(t)=t^{-1}(t-1)^{-1}\prod_{k=2}^{n}b^{-2}(t,t_k^*)\,d\mu(t),\qquad t>1.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\mu$ содержит более n точек, согласно теореме Лебега

$$\varphi'(0)=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t^3}\,d\nu(t)<0.$$

Значит, $\varphi(0)>\varphi(u)$ при достаточно малых $u>0$, и поэтому $t_1^*>0$.

Сейчас покажем, что числа $t_1^*,t_2^*,\dots,t_n^*$ попарно различны. Докажем, например, что $t_1^*\neq t_2^*$. Зафиксируем некоторое $t_1\in(0,1)$ и введем функцию

$$\psi(\tau)=\int b^{-2}(t,t_1+\tau)b^{-2}(t,t_1-\tau)\,d\lambda(t),$$

где мера λ определяется условием

$$d\lambda(t)=t^{-1}(t-1)^{-1}\prod_{k=3}^{n}b^{-2}(t,t_k^*)\,d\mu(t),\qquad t>1,$$

а переменная τ такова, что $t_1 \pm \tau \in (0,1)$. Имеем

$$\psi'(0) = 0, \qquad \psi''(0) = -2\int \frac{(1-tt_1)^2}{(t-t^1)^6}(t^2-1)(t^2+2tt_1+1)\,d\lambda(t) < 0.$$

Значит, точка $\tau = 0$ является точкой локального максимума функции ψ и предположение $t_1^* \neq t_2^*$ противоречиво.

Перейдем к доказательству соотношений (6) и (7). Точка минимума $(t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*)$ функции Φ принадлежит открытому кубу $(0,1)^n$ и, значит, в ней выполнено необходимое условие экстремума: $\partial\Phi/\partial t_k = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Несложные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t_k} = \frac{2}{1-t_k}\int\left(\frac{1}{t-t_k} + \frac{1}{1-tt_k}\right)\frac{d\mu(t)}{tB_n(t)^2}.$$

Таким образом, имеют место равенства

$$\int \frac{d\mu(t)}{(t-t_k^*)tB_n^*(t)^2} = -\int \frac{d\mu(t)}{(1-tt_k^*)tB_n^*(t)^2}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку точки $t_1^*, t_2^*, \dots, t_n^*$ попарно различны, при всех допустимых t и z справедливо тождество

$$\frac{B_n^*(t) - B_n^*(z)}{t-z} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(z)}{1-t_k^* t},$$

где $A_k(z)$ – некоторые рациональные функции, зависящие лишь от z. Заменим здесь t на $1/t$. С учетом равенства $B_n^*(1/t) = 1/B_n^*(t)$ получим

$$\frac{1 - B_n^*(t)B_n^*(z)}{(1-tz)B_n^*(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(z)}{t-t_k^*}.$$

Из последних трех равенств находим, что

$$\int \frac{B_n^*(t) - B_n^*(z)}{t-z}\,\frac{d\mu(t)}{tB_n^*(t)^2} = -\int \frac{1 - B_n^*(t)B_n^*(z)}{(1-tz)}\,\frac{d\mu(t)}{tB_n^*(t)^3}.$$

Функцию $I_n(z)$ перепишем в виде

$$I_n(z) = zB_n^*(z)^2 \int \frac{d\mu(t)}{(t-z)tB_n^*(t)^2} + zB_n^*(z)\int \frac{B_n^*(t) - B_n^*(z)}{t-z}\,\frac{d\mu(t)}{tB_n^*(t)^2}.$$

Последние два равенства дают нам основное соотношение для $I_n(z)$:

$$I_n(z) = zB_n^*(z)^2 \int \frac{d\mu(t)}{(t-z)tB_n^*(t)^2} - zB_n^*(z)\int \frac{1 - B_n^*(t)B_n^*(z)}{(1-tz)}\,\frac{d\mu(t)}{tB_n^*(t)^3}. \tag{8}$$

Отсюда немедленно следует (6) для $z \in T$. Согласно принципу максимума модуля аналитической функции (6) выполняется для $z \in \Delta$. Для получения из (8) равенства (7) достаточно заметить, что $1/z = \overline{z}$ при $z \in T$. Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Если $\operatorname{supp}\mu$ содержит не более n точек, то согласно (2) и определению чисел $s_n(\mu)$ имеем $\Lambda_n(\widehat{\mu}, \Delta) = 0$ и $s_n(\mu) = 0$, т.е. (4) выполнено. В противном случае кроме равенства (2) нужно применить лемму 1. Теорема 1 доказана.

3. Ортопроекция в случае отрезка. Через $C(I)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций $g\colon I \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|g\| := \|g\|_{C(I)} := \max_{x\in I} |g(x)|.$$

Пространство $C(I)$ будем рассматривать также как предгильбертово, в котором скалярное произведение $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ определяется соотношением

$$(g,h) = \int_I g(x)\overline{h(x)}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad g,h \in C(I).$$

Пусть точки $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$ принадлежат $\overline{\mathbb{C}} \setminus I$. Введем $\mathscr{R}_n = \mathscr{R}_n(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$ – линейное пространство рациональных функций, полюсами которых с учетом кратности могут быть лишь $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$. Основным объектом нашего изучения (в случае отрезка) являются числа

$$\Lambda_n := \Lambda_n(g,I) := \inf \|g - P_n(\,\cdot\,,g)\|, \qquad g \in C(I),$$

где инфимум берется по всем $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n \in \overline{\mathbb{C}} \setminus I$.

Если все $\eta_k = \infty$, то $P_n(x,g)$ суть n-я частичная сумма ряда Фурье функции g по ортогональной системе многочленов Чебышева первого рода. В общем случае соответствующая ортогональная система построена М.М. Джрбашяном и А.А. Китбаляном [8]. Интегральное представление разности $g(x) - P_n(x,g)$ найдено в [9]. С помощью последнего можно получить аналог формулы (5) для отрезка. Здесь поступим более просто: интегральное представление разности $\widehat{\mu} - P_n(\,\cdot\,,\widehat{\mu})$ получим из (5) с помощью замены переменной.

Пусть

$$\eta = \varphi(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

– функция Жуковского, конформно отображающая $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus I$, $z = \psi(\eta) := \eta + \sqrt{\eta^2-1}$ – обратное отображение.

Теорема 2. *Пусть мера μ удовлетворяет условию (1), а мера ν определяется соотношением*

$$d\nu(t) = \frac{4t^2}{t^2-1}\,d\mu\bigl(\varphi(t)\bigr), \qquad t > 1. \tag{9}$$

Тогда для $x \in I$ имеет место равенство

$$\widehat{\mu} - P_n(x,\widehat{\mu}) = \frac{e^{i\theta}B_n(e^{i\theta})}{2}\int \frac{d\nu(t)}{(t-e^{i\theta})tB_n(t)} + \frac{e^{-i\theta}B_n(e^{-i\theta})}{2}\int \frac{d\nu(t)}{(t-e^{-i\theta})tB_n(t)}, \tag{10}$$

где $\theta = \arccos x$, а произведение Бляшке B_n определяется нулями $t_k = 1/\overline{\psi(\eta_k)}$, $k = 1,2,\dots,n$.

Доказательство. Производя несложные преобразования получим, что

$$\frac{1}{2}\big(\widehat{\nu}(e^{i\theta})+\widehat{\nu}(e^{-i\theta})\big)=\widehat{\mu}(x)+\mathrm{const},\qquad x\in I. \tag{11}$$

Далее зафиксируем $s\in\mathbb{N}$, $\eta_0\in\mathbb{C}\setminus I$ и положим $z_0=\psi(\eta_0)$. Легко также убедиться в том, что

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z_0-e^{i\theta})^s}+\frac{1}{(z_0-e^{-i\theta})^s}\right)=\frac{a_0+a_1x+\dots+a_sx^s}{(\eta_0-x)^s},\qquad x\in I, \tag{12}$$

где коэффициенты $a_0,a_1,\dots,a_s$ не зависят от x. В случае $\eta_0=\infty$ последнее тождество следует заменить тождеством

$$\frac{1}{2}(e^{is\theta}+e^{-is\theta})=T_s(x), \tag{13}$$

где $T_s(x)=\cos(s\arccos x)$ – многочлен Чебышева первого рода.

Заменим в (5) меру μ на $-\nu$. С учетом соотношений (11)–(13) получим $\widehat{\mu}(x)-r_n(x)=\omega(x)$, $x\in I$, где $r_n(x)\in\mathscr{R}_n(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$, а через $\omega(x)$ обозначена правая часть равенства (10). Ниже показана ортогональность ω любой функции $g\in\mathscr{R}_n(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$. Все вместе это будет означать, что $r_(x)=P_n(x,\widehat{\mu})$.

Зафиксируем $t_0>1$ и положим

$$\omega_{t_0}(x)=\frac{e^{i\theta}B_n(e^{i\theta})}{t_0-e^{i\theta}}+\frac{e^{-i\theta}B_n(e^{-i\theta})}{t_0-e^{-i\theta}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}(\omega_{t_0},g)&=\int_I\omega_{t_0}(x)\overline{g}(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^\pi\omega_{t_0}(\cos\theta)\overline{g}(\cos\theta)\,d\theta\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}B_n(e^{i\theta})}{t_0-e^{i\theta}}\overline{g}(\cos\theta)\,d\theta=-i\int_T\frac{B_n(z)}{t_0-z}G(z)\,dz=0.\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь

$$G(z)=\overline{g}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right),\qquad z\in T.$$

Функция G является рациональной степени не выше $2n$, и ее полюсами могут быть лишь точки $t_1,t_2,\dots,t_n$, $1/t_1,1/t_2,\dots,1/t_n$. Значит, функция $(t_0-z)^{-1}B_n(z)G(z)$ аналитична на Δ и последнее равенство в (14) выполняется в силу теоремы Коши. Из (14) и теоремы Фубини находим, что $\omega\perp g$. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 и лемма 1 дают нам следующую теорему.

Теорема 3. *Если мера μ удовлетворяет условию* (1), *а мера ν определяется условием* (9), *то*

$$\Lambda_n(\widehat{\mu},I)\leqslant 3s_n(\nu),\qquad n=1,2,\dots.$$

4. Некоторые следствия. Для функции $f\in C_A$ $(g\in C(I))$ через $R_n=R_n(f,\Delta)$ обозначим наилучшее равномерное приближение рациональными функциями степени не выше n. Ясно, что $\Lambda_n\geqslant R_n$, $n=1,2,\dots$.

В случае, когда $1\notin\operatorname{supp}\mu$ последовательность $\{R_n\}$ хорошо изучена (см. [1]–[4]). Приведенная ниже теорема 4 показывает, что в этом случае последовательности $\{R_n\}$ и $\{\Lambda_n\}$ имеют один порядок малости. Нижние оценки из этой теоремы можно получить с применением двойственности, аналогично как в [5].

Теорема 4. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условию* (1), $a := \inf(\operatorname{supp}\mu) > 1$, $k(a) := (1-\ln(1-1/a))^{-1}$ *и мера* ν *определяется условием* (9). *Тогда при* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$c_1 k(a) s_n(\mu) \leqslant R_n(\widehat{\mu}, \Delta) \leqslant \Lambda_n(\widehat{\mu}, \Delta) \leqslant 3 s_n(\mu),$$
$$c_2 k(a) s_n(\nu) \leqslant R_n(\widehat{\mu}, I) \leqslant \Lambda_n(\widehat{\mu}, I) \leqslant 3 s_n(\nu),$$

где c_1 *и* c_2 *– абсолютные положительные постоянные.*

Пусть сейчас $\operatorname{supp}\mu = [1, a]$, $a > 1$, мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\mu'(t) \asymp (t-1)^{\alpha} \quad \text{при} \;\; t \in [1, a]. \tag{15}$$

Согласно работам [5] и [6] в этом случае для R_n при $n = 1, 2, \ldots$ выполняются соотношения

$$R_n(\widehat{\mu}, \Delta) \asymp \exp(-\pi\sqrt{2\alpha n}), \qquad R_n(\widehat{\mu}, I) \asymp \exp(-2\pi\sqrt{\alpha n}).$$

Итак, из теорем 1, 3 и неравенства $R_n \leqslant \Lambda_n$ получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Если мера* μ *удовлетворяет условию* (15), *то при* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$c_1 \exp(-\pi\sqrt{2\alpha n}) \leqslant \Lambda_n(\widehat{\mu}, \Delta) \leqslant c_2\sqrt{n}\exp(-\pi\sqrt{2\alpha n}),$$
$$c_3 \exp(-2\pi\sqrt{\alpha n}) \leqslant \Lambda_n(\widehat{\mu}, I) \leqslant c_4\sqrt{n}\exp(-2\pi\sqrt{\alpha n}),$$

где постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 *положительны и не зависят от* n.

По нашему мнению, множитель $\sqrt{n}$ в правых частях последних соотношений можно опустить. Это предположение основано на равенстве (7). Однако, для применения (7) необходимо дополнительное изучение экстремального произведения B_n^*.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Матем. сб. 1978. Т. 105 (147). № 2. С. 147–163.
[2] Ganelius T. Orthogonal polynomials and rational approximation of holomorphic functions // Adv. Stud. Pure Math / ed. P. Erdös. To the Memory of Paul Turan. Basel: Birkhäuser, 1978. P. 237–243.
[3] Stahl H. Best rational approximants to Markov functions // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 1990. V. 58. P. 627–643.
[4] Braess D. Rational approximation of Stieltjes functions by the Caratheodory–Fejér method // Constr. Approx. 1987. V. 3. P. 43–50.
[5] Andersson J.-E. Rational approximation to functions like x^{α} in integral norms // Anal. Math. 1988. V. 14. № 1. P. 11–25.
[6] Пекарский А. А. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 2. С. 121–132.
[7] Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: ИЛ, 1961.
[8] Джрбашян М. М., Китбалян А. А. Об одном обобщении полиномов Чебышева // Докл. АН АрмССР. 1964. Т. 37. № 5. С. 263–270.
[9] Ровба Е. А. О приближении рациональными рядами Фурье–Чебышева // III Всесоюзная конференция “Новые подходы к решению дифференциальных уравнений” (г. Дрогобыч, 17–21 июня 1991г.). Тезисы докл. М.: ВЦ АН СССР, 1991. С. 115.

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Беларусь
E-mail: `rov@univer.belpak.grodno.by`

Поступило
06.03.98