УДК 539.3

С.М. Босяков

ПОВЕРХНОСТИ ОБРАТНЫХ СКОРОСТЕЙ И ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ФРОНТЫ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ СРЕД

Expressions for velocities of propagation of quasilongitudinal and quasitransversal waves in orthotropic material, and also coordinates of points of the media determining position of three-dimensional wave front during the any moment of time are obtained. Examples of construction of surfaces of reverse velocities and wave surfaces for fabric fiberglass are resulted.

В динамической теории упругости анизотропных сред большое место занимают исследования поверхностей, характеризующих различные аспекты распространения упругих волн. Таковыми, например, являются поверхности обратных скоростей, лучевые поверхности и т. д. [1]. Это обусловлено тем, что упомянутые поверхности дают возможность не только рассчитать скорости распространения волн, переноса энергии, но и наглядно представить волновые процессы, описать их особенности. Достаточно полный анализ закономерностей распространения упругих волн в анизотропных средах различных классов симметрии проведен в большом количестве публикаций, в том числе [2]. Тем не менее, трехмерные представления волновых движений (поверхности обратных скоростей, волновые поверхности) в анизотропных материалах, в частности материалах ромбической системы (ортотропных материалах), практически отсутствуют в полном объеме. В настоящей работе представлены результаты моделирования трехмерных волновых движений, распространяющихся в упругих ортотропных средах от сосредоточенного источника с помощью метода характеристик теории дифференциальных уравнений с частными производными [3, 4].

В этом случае уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}
\left(A_{13}+A_{55}\right)\partial_1\partial_3 u_3+\left(A_{12}+A_{66}\right)\partial_1\partial_2 u_2+\\
+A_{11}\partial_1^2 u_1+A_{66}\partial_2^2 u_1+A_{55}\partial_3^2 u_1=\rho\partial_t^2 u_1,\\
\left(A_{12}+A_{66}\right)\partial_1\partial_2 u_2+\left(A_{23}+A_{44}\right)\partial_2\partial_3 u_3+\\
+A_{66}\partial_1^2 u_2+A_{22}\partial_2^2 u_2+A_{44}\partial_3^2 u_2=\rho\partial_t^2 u_2,\\
\left(A_{13}+A_{55}\right)\partial_1\partial_3 u_1+\left(A_{23}+A_{44}\right)\partial_2\partial_3 u_2+\\
+A_{55}\partial_1^2 u_3+A_{44}\partial_2^2 u_3+A_{33}\partial_3^2 u_3=\rho\partial_t^2 u_3.
\end{gathered} \tag{1}$$

где A_{ij}, A_{kk} – константы упругости, $i, j=\overline{1,3}, k=\overline{4,6}$.

После стандартной процедуры для уравнения характеристик системы (1) будем иметь:

$$q_0\, p_0^6/c^6+q_1\, p_0^4/c^4+q_2\, p_0^2/c^2+q_3=0. \tag{2}$$

Коэффициенты уравнения (2) имеют вид:

$$q_0=-1,$$

$$q_1=\left(a_1+a_5+a_6\right)p_1^2+\left(a_2+a_4+a_6\right)p_2^2+\left(a_3+a_4+a_5\right)p_3^2,$$

$$q_2 = \left(2a_4^2 - a_1a_2 - a_1 - a_5a_2 - a_6 - a_5a_6 + 2a_4a_6\right) p_1^2 p_2^2 +$$

$$+\left(a_7^2 - a_1a_3 - a_1 - a_5 - a_3a_6 - a_5a_6 + 2a_7a_5\right) p_1^2 p_3^2 +$$

$$+\left(a_8^2 - a_2a_3 - a_2a_5 - a_5 - a_3a_6 - a_6 + 2a_8\right) p_2^2 p_3^2 -$$

$$-\left(a_1a_5 + a_1a_6 + a_5a_6\right) p_1^4 - \left(a_2 + a_2a_6 + a_6\right) p_2^4 - \left(a_3 + a_3a_5 + a_5\right) p_3^4,$$

$$q_3 = a_1a_5a_6 p_1^6 + a_2a_6 p_2^6 + a_3a_5 p_3^6 +$$

$$+p_1^2\Big(p_2^4\left(a_2\left(a_1 + a_5a_6\right) - a_4\left(a_4 + 2a_6\right)\right) +$$

$$+p_3^4\left(a_3\left(a_1 + a_5a_6\right) - a_7\left(a_7 + 2a_5\right)\right)\Big) +$$

$$+p_2^2\Big(p_1^4\left(a_1\left(a_2a_5 + a_6\right) - a_5a_7\left(a_7 + 2a_6\right)\right) +$$

$$+p_3^4\left(a_3\left(a_2a_5 + a_6\right) - a_5a_8\left(a_8 + 2\right)\right)\Big) +$$

$$+p_3^2\Big(p_1^4\left(a_1\left(a_5 + a_3a_6\right) - a_6a_7\left(a_7 + 2a_5\right)\right) +$$

$$+p_2^4\left(a_2\left(a_5 + a_3a_6\right) - a_6a_8\left(a_8 + 2\right)\right)\Big) + a_9 p_1^2 p_2^2 p_3^2,$$

где $a_9 = 2a_5a_6 + a_1a_2a_3 + a_1 + a_2a_5^2 + a_3a_6^2 - a_3\left(a_7 + a_6\right)^2 - a_1\left(a_8 + 1\right)^2 -$
$-a_2\left(a_7 + a_5\right)^2 + 2\left(a_8 + 1\right)\left(a_7 + a_5\right)\left(a_7 + a_6\right)$, $a_i = A_{ii}/A_{44}$, $a_4 = A_{12}/A_{44}$,
$a_7 = A_{13}/A_{44}$, $a_8 = A_{23}/A_{44}$, $c = \sqrt{A_{44}/\rho}$, $i = 1, 2, 3, 5, 6$.

Из уравнения (2) найдем безразмерные скорости v_i распространения упругих волн (коэффициенты $\hat{q}_i$ получаются из вышеприведенных коэффициентов q_i заменой параметров p_k на направляющие косинусы нормали к поверхности n_k, $i, k = \overline{1,3}$):

$$v_k = \sqrt{2\sqrt{-\frac{\hat{p}}{3}} \cos\left(\frac{\hat{\Lambda} + 2\pi(4-k)}{3}\right) - \frac{\hat{q}_1}{3q_0}},$$
$$\hat{\Lambda} = arc\cos\left(-\frac{\hat{q}}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{\hat{p}}\right)^3}\right), \qquad (3)$$

где $\hat{p} = -\frac{\hat{q}_1^2}{3q_0^2} + \frac{\hat{q}_2}{q_0}$; $\hat{q} = \frac{2\hat{q}_1^3}{27q_0^3} - \frac{\hat{q}_1\hat{q}_2}{3q_0^2} + \frac{\hat{q}_3}{q_0}$, $k = \overline{1,3}$.

Для любых значений угла наклона нормали к характеристической поверхности выполняется $v_1 > v_2 \geq v_3$, то есть индекс $k = 1$ соответствует квазипродольной волне, индексы $k = 2, 3$ – квазипоперечным волнам.

Полученные выражения для скоростей (3) позволяют выполнить построение безразмерных поверхностей обратных скоростей квазипродольной и квазипоперечной волн, распространяющихся в ортотропной среде. На рис. 1 представлены безразмерные поверхности обратных скоростей для тканевого стеклопластика горячего прессования СТЭТ, упругие свойства которого описываются константами $a_1 = 6{,}02$, $a_2 = 5{,}31$, $a_3 = 3{,}27$, $a_4 = 1{,}15$, $a_5 = 1{,}05$, $a_6 = 1{,}21$, $a_7 = 0{,}75$, $a_8 = 1{,}32$ (числовые данные, необходимые для расчета, взяты из [5]).

Заметим, что аналогичный вид имеют поверхности обратных скоростей для квазипродольных и квазипоперечных волн, распространяющихся в намоточном однонаправленном и ортогонально-армированном стеклопластике.

Выразим из уравнения (2) параметр p_0:

$$p_0^{(k)} = c\sqrt{2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\Lambda + 2\pi(4-k)}{3}\right) - \frac{q_1}{3q_0}},$$
$$\Lambda = arc\cos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right), \tag{4}$$

где $p = -\frac{q_1^2}{3q_0^2} + \frac{q_2}{q_0}$; $q = \frac{2q_1^3}{27q_0^3} - \frac{q_1 q_2}{3q_0^2} + \frac{q_3}{q_0}$, верхний индекс указывает на тип упругой волны ($k = 1$ соответствует квазипродольной волне, $k = 2, 3$ – квазипоперечным волнам).

Выполним дифференцирование выражений (4) по p_i, $i = \overline{1,3}$. В результате после несложных преобразований будем иметь безразмерные координаты $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ точек ортотропной среды, до которых к моменту времени t дошла энергия волнового возмущения:

$$\frac{x_i^{(k)}}{ct} = \frac{1}{v_k}\left(\frac{1}{2\sqrt{-3\hat{p}}}\left(\frac{2\hat{q}_1\hat{q}_{1i}}{3q_0^2} - \frac{\hat{q}_{2i}}{q_0}\right)\cos\left(\frac{\hat{\Lambda} + 2\pi\left(4-k\right)}{3}\right) -\right.$$
$$-\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{\hat{p}}{3}}\sin\left(\frac{\hat{\Lambda} + 2\pi\left(4-k\right)}{3}\right)\sqrt{\frac{\hat{p}^3}{4\hat{p}^3 + 27\hat{q}^2}} \times$$
$$\times\left(\left(\frac{2\hat{q}_1^2\hat{q}_{1i}}{9q_0^3} - \frac{\hat{q}_2\hat{q}_{1i} + \hat{q}_1\hat{q}_{2i}}{3q_0^2} + \frac{\hat{q}_{3i}}{q_0}\right)\sqrt{\left(-\frac{3}{\hat{p}}\right)^3} - \right. \tag{5}$$
$$\left.\left.-\frac{9\hat{q}\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{\hat{p}}\right)^5}\left(\frac{2\hat{q}_1\hat{q}_{1i}}{3q_0^2} - \frac{\hat{q}_{2i}}{q_0}\right)\right)\right),$$

Здесь коэффициенты $\hat{q}_{ki}$, $i, k = \overline{1,3}$, определяются следующим образом:

$$\hat{q}_{11} = 2\left(a_1 + a_5 + a_6\right)n_1, \hat{q}_{12} = \left(a_2 + a_4 + a_6\right)n_2, \hat{q}_{13} = \left(a_3 + a_4 + a_5\right)n_3,$$
$$\hat{q}_{21} = 2\left(2a_4^2 - a_1 a_2 - a_1 - a_5 a_2 - a_6 - a_5 a_6 + 2a_4 a_6\right)n_1 n_2^2 +$$
$$+2\left(a_7^2 - a_1 a_3 - a_1 - a_5 - a_3 a_6 - a_5 a_6 + 2a_7 a_5\right)n_1 n_3^2 - 4\left(a_1 a_5 + a_1 a_6 + a_5 a_6\right)n_1^3,$$

$$\hat{q}_{22} = 2\left(2a_4^2 - a_1a_2 - a_1 - a_5a_2 - a_6 - a_5a_6 + 2a_4a_6\right)n_2n_1^2 +$$

$$+2\left(a_8^2 - a_2a_3 - a_2a_5 - a_5 - a_3a_6 - a_6 + 2a_8\right)n_2n_3^2 - 4\left(a_2 + a_2a_6 + a_6\right)n_2^3,$$

$$\hat{q}_{23} = 2\left(a_7^2 - a_1a_3 - a_1 - a_5 - a_3a_6 - a_5a_6 + 2a_7a_5\right)n_3n_1^2 +$$

$$+2\left(a_8^2 - a_2a_3 - a_2a_5 - a_5 - a_3a_6 - a_6 + 2a_8\right)n_3n_2^2 - 4\left(a_3 + a_3a_5 + a_5\right)n_3^3,$$

$$\hat{q}_{31} = 6a_1a_5a_6n_1^5 + 2\Big(n_2^4\left(a_2\left(a_1 + a_5a_6\right) - a_4\left(a_4 + 2a_6\right)\right) +$$

$$+n_3^4\left(a_3\left(a_1 + a_5a_6\right) - a_7\left(A_{13} + 2a_5\right)\right)\Big)n_1 +$$

$$+4\Big(n_3^2\left(a_1\left(a_5 + a_3a_6\right) - a_6a_7\left(a_7 + 2a_5\right)\right) +$$

$$+n_2^2\left(a_1\left(a_2a_5 + a_6\right) - a_5a_7\left(a_7 + 2a_6\right)\right)\Big)n_1^3 + 2a_9n_1n_2^2n_3^2,$$

$$\hat{q}_{32} = 6a_2a_5n_2^5 + 2\Big(n_1^4\left(a_1\left(a_2a_5 + a_6\right) - a_5a_7\left(a_7 + 2a_6\right)\right) +$$

$$+n_3^4\left(a_3\left(a_2a_5 + a_6\right) - a_5a_8\left(a_8 + 2\right)\right)\Big)n_2 +$$

$$+4\Big(n_1^2\left(a_2\left(a_1 + a_5a_6\right) - a_4\left(a_4 + 2a_6\right)\right) +$$

$$n_3^2\left(a_2\left(a_5 + a_3a_6\right) - a_6a_8\left(a_8 + 2\right)\right)\Big)n_2^3 + 2a_9n_2n_1^2n_3^2,$$

$$\hat{q}_{33} = 6a_3a_5n_3^5 + 2\Big(p_1^4\left(a_1\left(a_5 + a_3a_6\right) - a_6a_7\left(a_7 + 2a_5\right)\right) +$$

$$+p_2^4\left(a_2\left(a_5 + a_3a_6\right) - a_6a_8\left(a_8 + 2\right)\right)\Big)n_3 +$$

$$4\Big(n_1^2\left(a_3\left(a_1 + a_5a_6\right) - a_7\left(a_7 + 2a_5\right)\right) +$$

$$+n_2^2\left(a_3\left(a_2a_5 + a_6\right) - a_5a_8\left(a_8 + 2\right)\right)\Big)n_3^3 + 2a_9n_3n_1^2n_2^2.$$

На рис. 2 представлены поверхности квазипродольной и квазипоперечных волн, распространяющихся в тканевом стеклопластике горячего прессования СТЭТ, вид которых определяется соответствующими безразмерными координатами $\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}\right)$ из формул (5) (числовые данные прежние).

Из рис. 2 видно, что распространение квазипоперечных волн в тканевом стеклопластике СТЭТ сопровождается образованием сложной системы лакун. В частности, при распространении одной из квазипоперечных волн (рис. 2, 2) возникает две кольцевые лакуны, при распространении другой квазипоперечной волны (рис. 2, 3) –четыре лакуны с плоским основанием.

В заключение отметим, что с помощью выражений для координат достаточно легко можно построить сечения поверхностей обратных скоростей и трехмерных волновых фронтов координатными плоскостями, а также другими плоскостями, проходящими через начало координат.

1. Д ь е л е с а н Э., Р у а й е Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М. 1982.

2. Ш а с к о л ь с к а я М. П. Акустические кристаллы. М., 1982.

3. К у р а н т Ф. Уравнения с частными производными. М., 1964.
4. П е т р а ш е н ь Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград, 1980.
5. Л е х н и ц к и й С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.

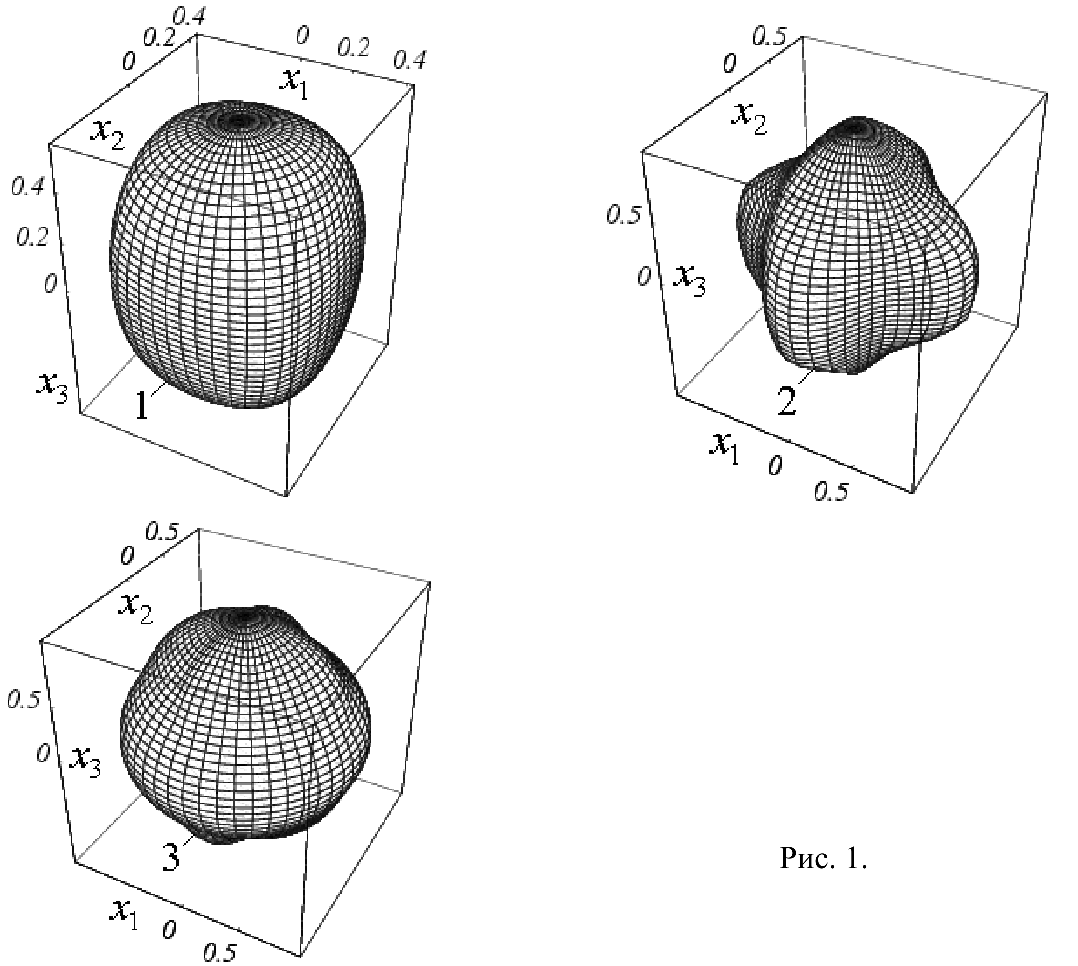

Рис. 1.

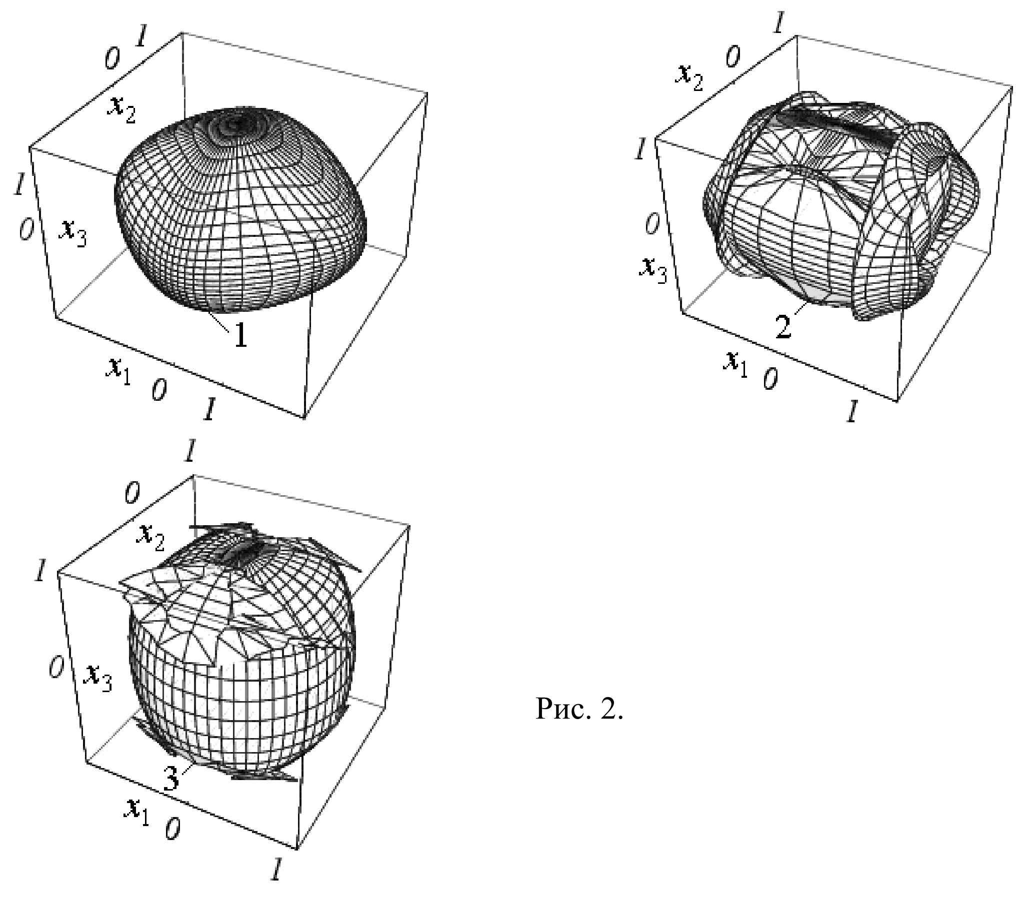

Рис. 2.

Подрисуночные подписи:

Рис. 1. Безразмерные поверхности обратных скоростей $1/v_i$, $i=\overline{1,3}$ для тканевого стеклопластика горячего прессования СТЭТ: 1 – для квазипродольной волны; 2, 3 – для квазипоперечных волн

Рис. 2. Безразмерные трехмерные фронты упругих волн, распространяющиеся в тканевом стеклопластике СТЭТ: 1 - квазипродольная волна; 2, 3 – квазипоперечные волны

УДК 539.3

Босяков С.М. Поверхности обратных скоростей и трехмерные волновые фронты для ортотропных сред // Вестник БГУ. Серия 1.

Получены выражения для скоростей распространения квазипродольных и квазипоперечных волн в ортотропном материале, а также выражения для координат точек среды, определяющих положение трехмерного волнового фронта в любой момент времени. Приведены примеры построения поверхностей обратных скоростей и волновых поверхностей для ориентированного стеклопластика.

Bosiakov S. M. The surface of inverse velocities and three-dimensional wave fronts for orthotropic media