функция $g(z) = \dfrac{z^2}{2z - 251{,}5936}$ отображает указанную область на верхнюю полуплоскость. Таким образом, функция $\xi_0 = \varphi(z) = g \circ \varphi_9$ конформно отображает область $D_1^{'}$ на $\{\xi : \mathrm{Im}\,\xi > 0\}$. Значит, функция $\xi == a\xi_0 = ag \circ \varphi_9$ отображает область D_1 на полуплоскость $\{\xi : \mathrm{Im}\,\xi > 0\}$. Конформное отображение полуплоскости $\{\xi : \mathrm{Im}\,\xi > 0\}$ на полуполосу G_1 найдено в разделе 2. Таким образом, функция $w = w(z) = h \circ \xi = ah \circ g \circ \varphi_9$ конформно отображает область D_1 на полуполосу G_1. Как и в разделе 2, строим находим конформное отображение области D на область G с помощью принципа симметрии.

Замечание. Рассматриваемая в работе задача связана с исследованием эффективных свойств двумерных композиционных материалов (см. [4]).

Литература

1. *Сидоров И. В.*, *Федорюк М. В.*, *Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва “Наука”, 1989.
2. *Andersson A*. Using a zipper algorithm to find a conformal map for a channel with smooth boundary, in: AIP Conference Proceedings: Second Conference on Mathematical Modeling of Wave Phenomena, vol. 834, AIP, New York, 2006, pp. 3-12 .
3. *Driscoll T. A*. Schwarz – Christoffel toolbox for Matlab (2002). URL http: //www.math.udel.edu/~driscoll/SC.
4. *Mityushev V.*, *Rogosin S.* On the Riemann – Hilbert Problem with a Piecewise Constant Matrix. ZAA (Journal for Analysis and its Applications), vol. 27 (2008), pp. 53-66.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ НА ПРЕДУПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ, СНАБЖЕННОМ ТОПОЛОГИЕЙ

Е. В. Гирейко

ВВЕДЕНИЕ

Основное предположение, сделанное пионерами классической микроэкономики такими, как Эджворт и Парето, заключалось в том, что ранжирование потребительских предпочтений может быть всегда измерено численно, связывая с каждым возможным набором товаров действительное число, которое измеряет его полезность. И только через несколько десятилетий была установлена наивность данного предположения экономистами, первым из которых, по-видимому, был Вальд. Работа Вальда стала первой в длинной цепочке результатов этого типа, которые привели к теоремам Дебре в 60 годы прошлого столетия, а также совершенствованиям и обобщениям, появившимся позже.

Впоследствии появилась общая математическая проблема, которая имеет приложения в экономике, теории меры и других областях, возникающая естественно при изучении множеств, снабженных отношением упорядочения [3]:

Для данного вида отношения упорядочения $\leq$ на множестве X найти условия, которые обеспечивают существование функции полезностина X. Если, к тому же, на X задана топология, найти условия, которые обеспечивают для этой функции полунепрерывность и непрерывность на X.

В данной работе будет разобран только случай полунепрерывности. Более того, здесь будет разобран только случай полунепрерывной сверху функции полезности, поскольку случай полунепрерывной снизу функции полезности рассматривается аналогично. Для того чтобы получить аналогичные результаты по существованию полунепрерывной снизу функции полезности f, необходимо заменить f на $-f$ и затем применять теоремы по существованию полунепрерывной сверху функции полезности на множестве, снабженном обратным отношением. Для удобства изложения работа разбита на разделы.

1.ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ.

Рефлексивное бинарное отношение $\leq$ на множестве X будем называть отношением предпорядка, если оно является транзитивным. При этом пару (X,J) будем называть предупорядоченным множеством.

Иррефлексивное бинарное отношение $<$ будем называть отношением строгого предпорядка, если оно является транзитивным.

Симметричное бинарное отношение $\approx$ будем называть отношением эквивалентности, если оно является рефлексивным и транзитивным.

Каждое отношение предпорядка $\leq \subset X \times X$ порождает на X еще два отношения – отношение строгого предпорядка $<$ и отношение эквивалентности $\approx$, которые вводятся следующим образом:

$$x < y \Leftrightarrow (x,y) \in \leq, (y,x) \notin \leq .$$

$$x \approx y \Leftrightarrow x \leq y, y \leq x .$$

Пусть $(X,\leq)$ – предупорядоченное множество, $<$ и $\approx$ соответственно отношение строгого предпорядка и отношение эквивалентности на X, сопровождающие $\leq$, Q – подмножество из X.

Элемент $x^0 \in Q$ называется $<$-максимальным элементом подмножества

Q, если не существует $x \in Q$ такого, что $x^0 < x$. Множество всех $<$-максимальных элементов подмножества Q будем обозначать символом $Max(Q\,|<)$.

Начальным отрезком $(X,\leq)$ называется такое его подмножество $I \subset X$, которое удовлетворяет условию: для любого $y \in I$ и любого $x \in X$ такого, что $x \leq y$ выполняется $x \in I$.

Семейство Σ, состоящее из начальных отрезков $(X,\leq)$ назовем порядково плотным в $(X,\leq)$, если для любых $x, y \in X$ таких, что $x < y$ существует $I_{x,y} \in \Sigma$ такой, что $x \in I_{x,y}, y \notin I_{x,y}$.

Предупорядоченное множество $(X,\leq)$ называется порядково сепарабельным [1], если существует не более чем счетное порядково плотное семейство начальных отрезков $(X,\leq)$.

Предупорядоченное множество $(X,\leq)$ назовем порядково сепарабельным в смысле Дебре, если в нем существует не более чем счетное подмножество S, удовлетворяющее следующему условию: для всех $x, y\, \mathrm{O}\, X$ таких, что $x < y$ существует $s\, \mathrm{O}\, S$ такой, что $x\, \mathrm{J}\;\; s\, \mathrm{J}\;\; y$.

Функцией полезности на предупорядоченном множестве $(X,\leq)$ называется функция $u: X \to$ □, удовлетворяющая двум условиям:

1. $u(x) < u(y)$ для любых $x, y \in X$ таких, что $x < y$.
2. $u(x) = u(y)$ для любых $x, y \in X$ таких, что $x \approx y$.

Отношением порядка на X будем называть такое отношение предпорядка $\leq \subset X \times X$, которое удовлетворяет следующему условию: $x \leq y$ или $y \leq x$ для любых $x, y \in X$. При этом пару $(X, \mathrm{J}\,)$ будем называть упорядоченным множеством.

Для множеств $\{x \in X : x < y\}$, $\{x \in X : y \leq x\}$ будем использовать соответственно обозначения $<^{-1}(y)$, $\leq(y)$.

2. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СВЕРХУ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ НА ПРЕДУПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ, СНАБЖЕННОМ ТОПОЛОГИЕЙ.

Теорема 1. Пусть $(X, \mathrm{J}\,)$ − предупорядоченное множество, снабженное топологией t. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Существует t - полунепрерывная сверху функция полезности на $(X, \mathrm{J}\,)$.

(2) Существует не более чем счетное семейство t - открытых начальных отрезков, которое является порядково плотным в $(X, \mathrm{J}\,)$.

3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СВЕРХУ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ НА ПРЕДУПОРЯДОЧЕННОМ

МНОЖЕСТВЕ, СНАБЖЕННОМ ТОПОЛОГИЕЙ.

Пользуясь **Теоремой 1** можно получить следующее.

Теорема 2.1. Пусть $(X,\mathrm{J}\ )$ − порядково сепарабельное в смысле Дебре предупорядоченное множество, снабженное топологией t, причем $<^{-1}(x)$ является t - открытым для любого $x\,\mathrm{O}\,X$. Тогда существует t - полунепрерывная сверху функция полезности на $(X,\mathrm{J}\ )$.

Теорема 2.2. Пусть $(X,\mathrm{J}\ )$ − предупорядоченное множество, снабженное топологией t ; $\mathrm{J}\ (x)$ является t - замкнутым для любого $x\,\mathrm{O}\,X$; существует не более чем счетное подмножество S из X такое, что для всех $x, y\,\mathrm{O}\,X$ таких, что $x < y$ существует $s\,\mathrm{O}\,S$ такой, что $x < s\,\mathrm{J}\ y$.

Тогда существует t - полунепрерывная сверху функция полезности на $(X,\mathrm{J}\ )$.

4. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ СВЕРХУ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ НА УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ, СНАБЖЕННОМ ТОПОЛОГИЕЙ.

Пользуясь Теоремой 1 или Теоремой 2.1 можно получить.

Теорема 3. Пусть $(X,\mathrm{J}\ )$ − упорядоченное множество, снабженное топологией t . Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Существует t - полунепрерывная сверху функция полезности на $(X,\mathrm{J}\ )$.

(2)(i) $<^{-1}(x)$ является t - открытым для любого $x\,\mathrm{O}\,X$

($\mathrm{J}\ (x)$ является t - замкнутым для любого $x\,\mathrm{O}\,X$).

(ii) $(X,\mathrm{J}\ )$ является порядково сепарабельным.

5. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА РЕЙДЕРА.

Пользуясь **Теоремой 3** можно получить классическую теорему Рейдера, формулировка которой впервые появилась в [6]. Следует отметить, что существует ошибка в доказательстве Рейдера, о которой написано в [5]. Для ознакомления с другими доказательствами теоремы Рейдера мы отсылаем читателя к статье [4].

Теорема 4(Рейдер). Пусть $(X,\mathrm{J}\ )$− предупорядоченное множество, снабженное топологией t , удовлетворяющей второй аксиоме счетности, причем $\mathrm{J}\ (x)$ является t - замкнутым для любого $x\,\mathrm{O}\,X$.

Тогда существует t - полунепрерывная сверху функция полезности на $(X,\mathrm{J}\ )$.

6. ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ.

Пользуясь Теоремой 1 и классической теоремой Вейерштрасса получаем следующее

Предложение 1. Пусть (X,t) − компактное топологическое пространство, снабженное отношением предпорядка J ; выполнено условие (2) Теоремы 1. Тогда $Max(X|<)$ №Ж.

Заключение.

В этой работе представляется очень простой подход к изучению существования полунепрерывной функции полезности на предупорядоченном множестве, снабженном топологией. Даются простые достаточные условия существования полунепрерывной функции полезности. Используя эти условия, была получена классическая теорема Рейдера и критериальные условия существования полунепрерывной функции полезности на упорядоченном множестве, снабженном топологией. Дается простое достаточное условие существования максимальных элементов на компактном топологическом пространстве, снабженном отношением предпорядка. Для ознакомления с другими подходами решения данной проблемы отсылаем читателя в [2].

Литература

1. *Кирута А.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б.*Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. / Ленинград: Наука. Ленингр. отделение, 1980. - 168с.
2. *Bosi G., Mehta G.B.* Existence of a semicontinuous or continuous utility function: a unified approach and an elementary proof. // Journal of Mathematical Economics, 2002, vol. 38, 311-328.
3. *Bridges D.S., Mehta G.B.* Representations of Preferences Orderings. / Springer - Verlag, Berlin, 1995.
4. *Isler R.* Semicontinuous utility functions in topological spaces. // Rivista di Matematica per le Scienze Economiche eSociali, 1997, vol. 20, 111-116.
5. *Mehta G.B.* A remark on a utility representation theorem of Rader. // Economic Theory, 1997, vol. 9, 367-370.
6. *Rader T.* The existence of a utility function to represent preferences. // Review of Economic Studies, 1963, vol. 30, 229-232.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РЕБЕРНЫХ ГРАФОВ ОБОБЩЕННЫХ ХЭЛЛИЕВЫХ ГИПЕРГРАФОВ ОГРАНИЧЕННОГО РАНГА

О. В. Глебова

В работе рассматриваются конечные гиперграфы без изолированных вершин. Через $V(H)$ и $E(H)$ обозначаются *множество вершин* и *семейство ребер* гиперграфа H соответственно. *Рангом* гиперграфа назы-